J. M. Dechateaugiron Sousprin-
cipal du college de Rennes 1775

3
2

ÉLÉMENS D'ALGEBRE.

TOME PREMIER.

ÉLÉMENS D'ALGEBRE

PAR

M. LÉONARD EULER,

TRADUITS DE L'ALLEMAND,

AVEC DES NOTES ET DES ADDITIONS.

TOME PREMIER.

DE L'ANALYSE DÉTERMINÉE.

A LYON,

Chez JEAN-MARIE BRUYSET, Pere & Fils.

ET A PARIS,

Chez la Veuve DESAINT, Libraire, rue du Foin-Saint-Jacques.

M. DCC. LXXIV.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

A MONSIEUR,

M. D'ALEMBERT,

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE FRANÇOISE, DES ACADÉMIES ROYALES DES SCIENCES DE FRANCE, DE PRUSSE, D'ANGLETERRE ET DE RUSSIE, DE L'ACADÉMIE ROYALE DES BELLES-LETTRES DE SUEDE, DE L'INSTITUT DE BOLOGNE ET DES SOCIÉTÉS ROYALES DES SCIENCES DE TURIN ET DE NORWEGE.

MONSIEUR,

Il ne nous appartient ni de prononcer ſur le mérite de l'Ouvrage dont vous nous avez permis de faire

paroître la premiere édition Françoise sous vos auspices, ni d'ajouter aux éloges qu'il a reçus, soit dans sa langue originale, soit dans la traduction Russe qu'on en a donnée. Le nom seul de M. EULER, *en le rendant précieux aux Mathématiciens, annonce à ceux qui travaillent à le devenir, tout ce qu'ils peuvent s'en promettre.*

M. BERNOULLI, *digne héritier de ce nom si grand dans les Sciences, & Directeur de l'Observatoire de Berlin, s'est chargé de rendre en notre langue le texte de* M. EULER, *& de l'enrichir de quelques Notes historiques.* M. DE LA GRANGE, *dont le rare génie & les nombreux succès fixent depuis long-temps l'attention*

de toute l'Europe savante, a ajouté au mérite de l'Ouvrage, en y joignant un morceau destiné à compléter le traité de l'Analyse indéterminée.

Tout concourt, MONSIEUR, *à établir vos droits sur l'hommage que nous prenons la liberté de vous offrir. C'est au Philosophe, au Mathématicien qui honore son siecle, que nous devions présenter l'Ouvrage d'un homme également destiné à l'illustrer. L'ambition s'attacha souvent au rang pour s'appuyer de la faveur de la protection; un motif qui nous est plus cher nous porte à vous offrir le témoignage public de la reconnoissance que nous devons aux bontés dont vous nous avez honorés. En plaçant votre nom à la tête de ce Livre, nos senti-*

mens pour vous, MONSIEUR, nous ont ſuggéré le choix qu'auroit pu faire le diſcernement le plus juſte, & nous nous applaudirons dans notre hommage, d'avoir l'Europe entiere pour témoin & pour approbateur.

Nous avons l'honneur d'être avec le plus profond reſpect,

MONSIEUR,

Vos très-humbles & très-obéiſſans ſerviteurs
J. M. BRUYSET, *pere & fils.*

AVERTISSEMENT DES ÉDITEURS DE L'ORIGINAL.

Nous mettons entre les mains des Amateurs de l'Algebre un Ouvrage dont il a déjà paru une traduction Ruſſe il y a deux ans.

Les vues du célebre Auteur étoient de compoſer un Livre élémentaire, au moyen duquel on pût apprendre, ſans aucun autre ſecours, l'Algebre à fond. La perte de ſa vue lui avoit ſuggéré cette idée, l'activité de ſon génie ne lui permit pas de dif-

férer long-temps à la mettre en exécution. M. *Euler* choisit pour cet effet un jeune homme qu'il avoit pris à son service en quittant Berlin, qui possédoit assez bien l'Arithmétique, mais qui n'avoit d'ailleurs aucune teinture des Mathématiques; il avoit appris le métier de Tailleur, & ne pouvoit être mis, quant à sa capacité, qu'au rang des esprits ordinaires. Non-seulement ce jeune homme a très-bien saisi tout ce que son illustre Maître lui enseignoit & lui dictoit, mais il s'est même trouvé en peu de temps en état d'achever tout seul les calculs algébriques les

plus difficiles, & de résoudre promptement toutes les questions analytiques qu'on lui proposoit.

Le fait que nous citons doit donner une idée d'autant plus avantageuse de la méthode qui regne dans cet Ouvrage, que le jeune homme qui l'a écrit, qui en a développé les calculs, & dont les progrès ont été si marqués, n'a reçu absolument d'autres instructions que de ce Maître, supérieur à la vérité, mais privé de la vue.

Indépendamment d'un avantage aussi grand, les Connoisseurs verront, avec autant de

plaiſir que d'admiration, l'expoſition de la doctrine des logarithmes & de ſa liaiſon avec d'autres calculs, ainſi que les méthodes qu'on donne pour la réſolution des équations du troiſieme & du quatrieme degré.

Ceux enfin que les problemes de *Diophante* peuvent intéreſſer, ſeront charmés de trouver dans la derniere ſection de la ſeconde Partie, tous ces problemes préſentés d'une maniere ſuivie, & l'explication de tous les procédés de calcul néceſſaires pour les réſoudre.

AVERTISSEMENT
DU TRADUCTEUR.

Le Traité d'Algebre que j'ai entrepris de traduire, a été publié en Allemand en 1770 par l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg. Je m'abſtiendrai d'en louer le mérite, ce ſeroit preſque faire injure au nom célebre de ſon Auteur; il ſuffira d'ailleurs d'en lire quelques pages, pour voir, par la clarté avec laquelle tout eſt expoſé, quel fruit les Commençans peuvent en retirer. C'eſt ſur d'autres objets que je crois devoir un Avertiſſement.

Je me ſuis écarté de la diviſion ſuivie dans l'original, en faiſant entrer dans le premier volume de la traduction Françoiſe la premiere Section du ſecond volume de l'original, qui complette l'Analyſe déterminée.

On ſentira facilement les raiſons de ce changement; non-ſeulement il favoriſoit la diviſion aſſez naturelle de l'Algebre en Analyſe déterminée & en Analyſe indéterminée, mais il devenoit néceſſaire pour conſerver quelque égalité dans l'épaiſſeur des deux volumes, par rapport aux Additions qu'on trouve à la fin de la ſeconde Partie.

On s'appercevra aiſément à la lecture de ces Additions, qu'elles ne peuvent être que de M. *de la Grange*; auſſi ſont-elles une des raiſons qui m'ont principalement engagé à entreprendre ma Traduction; je me ſuis félicité d'être le premier à faire voir plus généralement aux Mathématiciens à quel haut point de perfection deux de nos plus illuſtres Géometres ont porté depuis peu une branche de l'Analyſe, peu connue, mais dont on ſent les épines dès qu'on cherche à l'approfondir, & qui, de l'aveu

même de ces grands génies, leur a offert les problemes les plus difficiles qu'ils aient jamais réſolus.

Je crois avoir traduit cette Algebre comme on convient qu'il faut traduire des Ouvrages de cette eſpece; je me ſuis principalement attaché à entrer dans le ſens de l'original & à le rendre avec toute la clarté poſſible; peut-être même oſerai-je attribuer quelque ſupériorité à ma Traduction ſur l'original, parce que cet Ouvrage ayant été dicté & n'ayant pu être revu par ſon illuſtre Auteur même, il eſt aiſé de concevoir qu'il auroit beſoin dans pluſieurs endroits qu'on y paſſât la lime. Au reſte, ſi je ne me ſuis point aſſervi à traduire littéralement, je n'ai pas laiſſé de ſuivre mon Auteur pas à pas; j'ai conſervé les mêmes diviſions dans les articles, & c'eſt dans un ſi petit nombre d'endroits que j'ai penſé à ſupprimer quelques détails de calcul, ou à inſérer une

ou deux lignes d'éclairciſſement dans le texte, qu'il ne vaut pas, je crois, la peine d'entrer dans le détail des raiſons qui peuvent me juſtifier.

Je ne dirai rien non plus des notes que j'ai ajoutées à la premiere Partie; elles ſont en aſſez petit nombre pour que je ne craigne pas le reproche d'avoir groſſi inutilement le volume; elles peuvent d'ailleurs répandre du jour ſur différens points de l'hiſtoire des Mathématiques, & faire connoître un grand nombre de tables ſubſidiaires peu connues.

Quant à l'exactitude de la correction, je compte qu'elle ne le cédera en rien à celle de l'original; j'ai comparé avec ſoin tous les calculs, & en ayant refait un grand nombre moi-même, j'ai pu corriger pluſieurs fautes indépendamment de celles qui étoient indiquées dans l'*Errata*.

ÉLÉMENS D'ALGEBRE.

PREMIERE PARTIE,

Où l'on traite de l'Analyſe déterminée.

SECTION PREMIERE.

Des différentes Méthodes de calcul pour les grandeurs ſimples ou incomplexes.

CHAPITRE PREMIER.

DES MATHÉMATIQUES EN GÉNÉRAL.

I.

ON nomme *grandeur* ou *quantité*, tout ce qui eſt ſuſceptible d'augmentation & de diminution.

Une ſomme d'argent eſt donc une quan-

tité, puisqu'on peut y ajouter & qu'on peut en ôter.

Il en est de même d'un poids & d'autres choses de cette nature.

2.

On voit donc facilement qu'il doit y avoir tant de différentes especes de grandeurs, qu'il seroit même difficile d'en faire l'énumération : & voilà l'origine des différentes Parties des Mathématiques, chacune d'elles s'occupant d'une espece particuliere de grandeurs. Les Mathématiques en général ne sont autre chose que la *science des quantités*, ou la science qui cherche les moyens de les mesurer.

3.

Or nous ne pouvons mesurer ou déterminer une quantité, qu'en regardant une autre quantité de la même espece comme connue, & en indiquant le rapport de celle-ci à celle-là.

Qu'il s'agisse, par exemple, de déterminer la quantité d'une somme d'argent, on regardera comme connu un louis, un écu, un ducat ou quelqu'autre monnoie, & on indiquera combien de ces pieces sont contenues dans ladite somme.

De même, s'il étoit question de déterminer la quantité d'un poids, on regarderoit un certain poids comme connu; par exemple, une livre, un quintal, une once, & on indiqueroit combien de fois tel ou tel poids est contenu dans celui qu'on détermine.

Veut-on mesurer une longueur ou une étendue, on se servira d'une certaine longueur connue, telle qu'est un pied.

4.

Ainsi les déterminations ou les mesures de grandeurs de toutes especes, reviennent à ceci : Qu'on fixe d'abord à volonté une certaine grandeur de la même espece que celle qu'on veut déterminer, afin de la

prendre pour *mesure* ou *unité ;* ensuite, que l'on détermine le rapport qu'a la grandeur prescrite avec cette mesure connue. Ce rapport s'exprime toujours par des nombres, d'où il s'ensuit qu'un nombre n'est autre chose que le rapport d'une grandeur à une autre prise arbitrairement pour l'unité.

5.

Il est évident par-là que toutes les grandeurs peuvent être exprimées par des nombres, & qu'on doit faire consister ce fondement de toutes les Sciences Mathématiques, dans un traité complet de la science des Nombres & un examen soigneux des différentes manieres de calculer qui peuvent se présenter.

On nomme cette partie fondamentale des Mathématiques, l'*Analyse* ou l'*Algebre* (*).

(*) Plusieurs Mathématiciens distinguent entre *Analyse* & *Algebre*. Ils entendent par le terme d'*Analyse* la méthode qui enseigne à trouver ces regles générales, au moyen desquelles on soulage l'esprit dans toutes les recherches mathématiques ; & ils nomment *Algebre* l'instrument que cette méthode emploie pour y parvenir. C'est la définition que M. *Bezout* adopte dans la Préface de son *Algebre*.

6.

On ne considere donc dans l'Analyse, que des nombres qui représentent des quantités, sans s'embarrasser des especes particulieres des Quantités. C'est dans les autres parties des Mathématiques qu'on s'occupe de ces especes.

7.

On traite des Nombres en particulier dans l'*Arithmétique*, qui est la *science des Nombres proprement dite ;* mais cette science ne s'étend qu'à de certaines façons de calculer qui se présentent ordinairement dans la vie commune. L'Analyse au contraire comprend généralement tous les cas qui peuvent avoir lieu dans la doctrine & le calcul des Nombres.

CHAPITRE II.

Explication des Signes + Plus & — Moins.

8.

QUAND il s'agit d'ajouter à un nombre donné un autre nombre, celà s'indique par le signe + qu'on met devant ce second nombre, & qu'on prononce *plus*. Ainsi 5 + 3 signifie qu'on doit ajouter encore 3 au nombre 5, & tout le monde sait qu'il en résultera 8; de même 12 + 7 font 19; 25 + 16 font 41; la somme de 25 + 41 est 66, &c.

9.

On a coutume aussi de se servir du même signe + *plus*, pour lier ensemble plusieurs nombres; par exemple: 7 + 5 + 9 signifie qu'au nombre 7 il faut ajouter 5 & de plus encore 9, ce qui fait 21. On comprend donc ce que signifie la formule suivante:

8 + 5 + 13 + 11 + 1 + 3 + 10,

à savoir, la somme de tous ces nombres, qui fait 51.

10.

Tout cela ne peut qu'être clair, & il reste à faire observer que dans l'Analyse on indique les nombres d'une maniere générale par des lettres, comme *a*, *b*, *c*, *d*, &c. Ainsi, quand on écrit $a + b$, cela signifie la somme des deux nombres qu'on a exprimés par *a* & *b*, & ces nombres peuvent être très-grands ou très-petits. De même $f + m + b + x$, signifie la somme des nombres indiqués par ces quatre lettres.

Il suffira donc toujours de savoir quels nombres ont été indiqués par de telles lettres pour trouver aussi-tôt, par l'Arithmétique, les sommes ou les valeurs de pareilles formules.

11.

Quand il est question, au contraire, d'ôter ou de soustraire un nombre d'un

autre nombre, on indique cette opération par le signe —, qui signifie *moins*, & qu'on met devant le nombre à soustraire: ainsi

8 — 5

signifie que le nombre 5 doit être ôté du nombre 8; ce qui étant fait il reste 3, comme personne ne l'ignore. De même 12 — 7 est autant que 5, & 20 — 14 est autant que 6, &c.

12.

Il peut arriver aussi qu'on ait plusieurs nombres à soustraire d'un seul nombre. C'est le cas de cet exemple:

50 — 1 — 3 — 5 — 7 — 9.

Cela signifie: Otez d'abord 1 de 50, il reste 49; ôtez 3 de ce reste, il restera 46; ôtez-en encore 5, restent 41; ôtez ensuite 7, il reste 34; ôtez-en enfin 9, restent 25; & ce dernier reste est la valeur de la formule proposée. Mais comme les nombres 1, 3, 5, 7, 9 sont tous à soustraire, il revient au même de soustraire leur somme, qui est 25, toute à la fois de 50; le reste sera 25, comme auparavant.

13.

Il est de même très-facile de déterminer la valeur de pareilles formules, où les deux signes + *plus* & — *moins* se rencontrent; par exemple:

12 — 3 — 5 + 2 — 1 est autant que 5.

Il n'y a qu'à prendre séparément la somme des nombres précédés du signe +, & en ôter celle des nombres précédés de —. La somme de 12 & de 2 est 14, celle de 3, 5 & 1, est 9; or 9 étant ôté de 14, il reste 5.

14.

On s'appercevra bien par ces exemples que l'ordre des nombres qu'on écrit est très-indifférent & tout-à-fait arbitraire, pourvu qu'on conserve à chacun son signe. Rien n'empêcheroit de mettre à la place de la formule du § précédent celles-ci:

12 + 2 — 5 — 3 — 1; ou 2 — 1 — 3 — 5 + 12;
ou 2 + 12 — 3 — 1 — 5;

ou encore d'autres; & il faut remarquer que dans la formule proposée, le signe $+$ est censé être mis devant le nombre 12.

15.

On n'aura plus de difficultés non plus quand, pour généraliser ces procédés, on voudra se servir de lettres à la place de nombres réels. Il est clair, par exemple, que

$$a - b - c + d - e$$

signifie qu'on a des nombres exprimés par a & d, & que de ces nombres, ou de leur somme, il faut ôter les nombres exprimés par les lettres b, c, e, & précédés du signe $-$.

16.

Il importe donc principalement ici de savoir quel signe se trouve devant chaque nombre. De-là vient que dans l'Algebre, les quantités simples sont les nombres considérés avec les signes qui les précedent

ou qui les *affectent*. On nomme *quantités positives*, celles devant lesquelles se trouve le signe $+$; & *quantités négatives*, celles qui sont affectées du signe $-$.

17.

La maniere dont on a coutume d'indiquer les biens d'une personne, est très-propre à éclaircir ce que nous venons de dire. On indique par des nombres positifs, & moyennant le signe $+$, ce qu'un homme possede réellement, au lieu que ses dettes se représentent par des nombres négatifs, ou par le moyen du signe $-$. Ainsi quand on dit de quelqu'un qu'il a 100 écus, mais qu'il en doit 50, c'est dire que son bien se monte à

$100 - 50$; ou, ce qui est la même chose, $+100 - 50$, c'est-à-dire 50.

18.

Puisque les nombres négatifs peuvent être considérés comme des dettes, en tant

que les nombres positifs indiquent des biens effectifs, on peut dire que les nombres négatifs sont moins que rien. Ainsi quand un homme ne possede rien, & qu'il doit même 50 écus, il est certain qu'il a 50 écus de moins que rien; car si quelqu'un lui faisoit présent de 50 écus pour payer ses dettes, il ne seroit encore qu'au point de n'avoir rien, quoiqu'il fût devenu plus riche qu'il n'étoit.

19.

De même donc que les nombres positifs sont incontestablement plus grands que rien, les nombres négatifs sont plus petits que rien. Or on obtient des nombres positifs en ajoutant 1 à 0, c'est-à-dire, à rien, & en continuant d'augmenter ainsi toujours de l'unité. C'est-là l'origine de la suite des nombres qu'on nomme *nombres naturels*; en voici les premiers termes:

$0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, +10,$ & ainsi de suite à l'infini.

Mais si au lieu de continuer ainsi cette suite par des additions successives on la continuoit dans le sens contraire, en retranchant perpétuellement l'unité, on auroit la suite, ou série suivante, des nombres négatifs:

$0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10,$ & ainsi de suite jusqu'à l'infini.

20.

Tous ces nombres tant positifs que négatifs, ont le nom connu de *nombres entiers*; lesquels par conséquent sont ou plus grands ou plus petits que rien. On les nomme *nombres entiers*, pour les distinguer d'avec les nombres rompus, & d'avec plusieurs autres especes de nombres dont nous parlerons dans la suite. Car 50, par exemple, étant plus grand d'une unité entiere que 49, on comprend facilement qu'il peut y avoir entre 49 & 50 une infinité de nombres intermédiaires, tous plus grands que 49, & pourtant tous plus petits que 50. On n'a

qu'à ſe repréſenter deux lignes, l'une longue de 50 pieds, l'autre longue de 49 pieds, on conçoit aiſément qu'on peut tirer un nombre infini de lignes toutes plus longues que 49 pieds, & plus courtes cependant que 50 pieds.

21.

Il importe extrêmement dans toute l'Algebre, que l'on ſe faſſe une idée nette de ces quantités négatives dont il a été queſtion. Je me contenterai de faire remarquer ici d'avance que toutes ces formules, par exemple,

$+1-1, +2-2, +3-3, +4-4,$ &c. valent 0 ou rien. Enſuite que

$+2-5$ vaut -3.

Car ſi quelqu'un a 2 écus & qu'il en doive 5, non-ſeulement il n'a rien, mais il doit encore 3 écus: de même

$7-12$ eſt autant que -5.

& $25-40$ vaut -15.

22.

Les mêmes choſes doivent s'obſerver, quand on emploie d'une maniere plus générale des lettres au lieu de nombres; on aura toujours 0 ou rien pour la valeur de $+a-a$. Veut-on ſavoir enſuite ce que ſignifie, par exemple, $+a-b$, l'on conſidérera deux cas:

Le premier a lieu quand a eſt plus grand que b; il faut alors ſouſtraire b de a & le reſte, devant lequel on mettra ou l'on ſuppoſera le ſigne $+$, qui indique la valeur cherchée.

Le ſecond cas eſt celui où a eſt plus petit que b; on ſouſtraira dans ce cas a de b, & on prendra le reſte négatif, en lui donnant le ſigne $-$, ce ſera la valeur cherchée.

CHAPITRE III.

De la multiplication des Quantités simples.

23.

QUAND on a deux ou plusieurs nombres égaux à ajouter ensemble, on peut exprimer cette somme d'une maniere abrégée; par exemple:

$a + a$ est autant que $2.a$ &
$a + a + a$ ——— $3.a$; de même
$a + a + a + a$ ——— $4.a$, & ainsi de suite.

C'est ainsi qu'on peut prendre une idée de la multiplication, & il faut remarquer que:

$2.a$ signifie 2 fois a &
$3.a$ ——— 3 fois a &
$4.a$ ——— 4 fois a, &c.

24.

S'il s'agit donc de multiplier un nombre exprimé par une lettre, avec un nombre quelconque, on met simplement ce nombre devant la lettre; ainsi

a multiplié par 20 fait $20\,a$, &
b multiplié par 30 donne $30\,a$, &c.

On voit aussi que c pris une fois, ou $1\,c$ est autant que c.

25.

Il est de plus facile de multiplier de semblables produits encore par d'autres nombres; par exemple:

2 fois $3\,a$ fait $6\,a$.
3 fois $4\,b$ fait $12\,b$.
5 fois $7\,x$ fait $35\,x$.

Et ces produits peuvent se multiplier encore par d'autres nombres à volonté.

26.

Quand le nombre par lequel on devroit multiplier, est aussi représenté par une lettre, on la met immédiatement devant l'autre lettre; ainsi quand il s'agit de multiplier b par a, le produit doit s'écrire $a\,b$;

& $p\,q$ ſera le produit de la multiplication du nombre q par p. Si l'on multiplioit ce $p\,q$ encore par a, on obtiendroit $a\,p\,q$.

27.

Il faut bien remarquer qu'ici l'ordre des lettres jointes enſemble eſt indifférent ; que $a\,b$ eſt la même choſe que $b\,a$; car b multiplié par a fait autant que a multiplié par b. Pour comprendre ceci on n'a qu'à prendre pour a & b des nombres connus, comme 3 & 4 ; la choſe ſera claire par elle-même : 3 fois 4 font autant que 4 fois 3.

28.

On n'aura pas de peine à voir, que quand il s'agit de mettre des nombres à la place des lettres jointes enſemble de la maniere qu'on a vu, on ne peut pas les écrire de la même maniere l'un à côté de l'autre. Car ſi l'on vouloit écrire 34 pour 3 fois 4, ce ſeroit mettre 34 & non pas 12. On a donc ſoin, quand il s'agit d'une multiplication de

nombres ordinaires, de les ſéparer par des points : ainſi 3.4 ſignifie 3 fois 4, c'eſt-à-dire 12. De même 1.2 eſt autant que 2 ; & 1.2.3 fait 6. Pareillement 1.2.3.4.56 fait 1344 ; & 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 vaut 3628800, &c.

29.

On peut auſſi conclure de-là ce que ſignifie une quantité de cette forme $5.7.8.abcd$. Elle montre que 5 doit ſe multiplier par 7, & qu'il faut multiplier ce produit encore par 8 ; enſuite qu'il faut multiplier ce produit des trois nombres, par a, & puis par b & puis par c, & enfin par d. On remarquera de plus qu'on peut écrire à la place de 5.7.8 ſa valeur, laquelle eſt 280 ; car c'eſt ce qui vient, quand on multiplie par 8 le produit de 5 par 7, ou 35.

30.

On aura remarqué que nous avons nommé PRODUITS les formules qui naiſſent de

la multiplication de deux ou plusieurs nombres. Il faut observer aussi qu'on nomme *facteurs* les nombres ou les lettres isolées.

31.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des nombres positifs, & il n'y a pas eu lieu de douter que les produits que nous avons vu se former ne fussent positifs de même : savoir $+a$ par $+b$ doit donner nécessairement $+ab$. Mais il faudra examiner à part ce qui doit provenir de la multiplication de $+a$ par $-b$, & de $-a$ par $-b$.

32.

Commençons par multiplier $-a$ par 3 ou $+3$; or puisque $-a$ peut être considéré comme une dette, il est clair que si l'on prend trois fois cette dette, elle doit aussi devenir trois fois plus grande, & par conséquent le produit cherché est $-3a$. De même s'il s'agit de multiplier $-a$ par $+b$, on obtiendra $-ba$, ou, ce qui

est la même chose, $-ab$. Nous tirons de-là la conséquence, qu'une quantité positive étant multipliée par une quantité négative, le produit est négatif ; & nous prenons pour regle, que $+$ par $+$ fait $+$ ou *plus*, & qu'au contraire $+$ par $-$, ou $-$ par $+$ donne $-$ ou *moins*.

33.

Il nous reste à résoudre encore ce cas où $-$ est multiplié par $-$, ou, par exemple, $-a$ par $-b$. Il est évident d'abord que, quant aux lettres, le produit sera ab ; mais il est incertain encore si c'est le signe $+$, ou bien le signe $-$ qu'il faut mettre devant ce produit ; tout ce qu'on sait, c'est que ce sera ou l'un ou l'autre de ces signes. Or je dis que ce ne peut être le signe $-$: car $-a$ par $+b$ donne $-ab$, & $-a$ par $-b$ ne peut produire le même résultat que $-a$ par $+b$; mais il doit en résulter l'opposé, c'est-à-dire, $+ab$; par conséquent nous avons cette regle : $-$ multiplié

par — fait +, de même que + multiplié par +.

34.

Les regles que nous venons de développer s'expriment plus briévement de la maniere qui suit :

Deux signes égaux ou semblables, multipliés l'un par l'autre, donnent +; deux signes dissemblables, ou contraires, donnent —. Ainsi quand il s'agit de multiplier ensemble ces nombres-ci: $+a$, $-b$, $-c$, $+d$; on a d'abord $+a$ multiplié par $-b$, fait $-ab$; ceci par $-c$, fait $+abc$, & ceci enfin multiplié par $+d$, fait $+abcd$.

35.

Les difficultés à l'égard des signes étant levées, nous n'avons plus qu'à faire voir comment on doit multiplier ensemble des nombres qui sont déjà des produits eux-mêmes. S'il s'agit, par exemple, de multiplier le nombre ab par le nombre cd,

le produit sera $abcd$, & il provient de ce qu'on multiplie d'abord ab par c, & ensuite le résultat de cette multiplication encore par d. Ou bien s'il s'agissoit de multiplier 36 par 12 : puisque 12 est autant que 3 fois 4, on n'auroit qu'à multiplier 36 d'abord par 3, & ensuite le produit 108 encore par 4, pour avoir le produit total de la multiplication de 12 par 36, lequel est par conséquent 432.

36.

Mais si l'on vouloit multiplier $5\,ab$ par $3\,cd$, on pourroit à la vérité écrire $3\,cd\,5\,ab$; cependant comme il ne s'agit pas ici de l'ordre des nombres à multiplier ensemble, on fera mieux de mettre, comme c'est aussi la coutume, les nombres ordinaires devant les lettres, & d'exprimer le produit de cette maniere: $5.3\,abcd$, ou $15\,abcd$; parce que 5 fois 3 est autant que 15.

De même si l'on avoit à multiplier $12\,pqr$ par $7\,xy$, on obtiendroit $12.7\,pqrxy$, ou $84\,pqrxy$.

CHAPITRE IV.

De la nature des Nombres entiers, eu égard à leurs facteurs.

37.

Nous avons remarqué qu'un produit tire son origine de la multiplication de deux ou de plusieurs nombres les uns par les autres, & qu'on nomme ces nombres des *facteurs*.

Ainsi ce sont les nombres *a*, *b*, *c*, *d*, qui sont les facteurs du produit *abcd*.

38.

Si l'on considere donc tous les nombres entiers en tant qu'ils peuvent provenir de la multiplication de deux ou de plusieurs nombres entr'eux, on trouvera bientôt que quelques-uns ne sauroient résulter d'une pareille multiplication, & n'ont par conséquent point de facteurs, tandis que d'autres

peuvent être les produits de deux ou de plusieurs nombres multipliés ensemble, & peuvent par conséquent avoir deux ou plusieurs facteurs. C'est ainsi que :

4 est autant que 2.2 ; que 6 est autant que 2.3 ; que 8 est autant que 2.2.2 ; ou 27 autant que 3.3.3 ; & 10 autant que 2.5, &c.

39.

Mais d'un autre côté les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, &c. ne peuvent être représentés de la même façon par des facteurs, à moins qu'on ne voulût employer pour cet effet l'unité, & représenter 2, par exemple, par 1.2. Or les nombres qui sont multipliés par 1, restant les mêmes, on n'a pas jugé à propos de compter l'unité parmi les facteurs.

Tous ces nombres donc, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, &c. qui ne peuvent pas s'indiquer par des facteurs, ont été nommés *nombres simples*, ou *nombres premiers* ; au lieu que

les autres, comme 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, &c. qui peuvent être représentés par des facteurs, s'appellent des *nombres composés.*

40.

Les nombres *simples* ou *premiers* méritent donc une attention particuliere, par la raison qu'ils ne proviennent pas de la multiplication de deux ou de plusieurs nombres. Il est sur-tout digne de remarque, que si l'on écrit ces nombres dans leur ordre naturel comme ils se suivent,

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, &c. (*)

(*) On trouve tous les nombres premiers depuis 1 jusqu'à 100000 dans les tables de Diviseur, dont je parlerai à l'art. 720 de la quatrieme section. Mais on a de plus des tables particulieres des nombres premiers qui vont depuis 1 jusqu'à 101000, & qui ont été publiées à Halle par M. *Kruger*, dans un Ouvrage Allemand intitulé *Pensées sur l'Algebre ;* M. *Kruger* les avoit eues en manuscrit de celui qui les avoit calculées, & qui se nommoit *Pierre Jaeger.* M. *Lambert* a continué ces tables jusqu'à 102000, & les a redonnées dans ses Supplémens aux Tables Logarithmiques & Trigonométriques, imprimées à Berlin en 1770, Ouvrage qui contient aussi plusieurs autres tables qui peuvent être d'une grande utilité dans les différentes parties des Mathématiques, & des éclaircissemens qu'il seroit trop long de rapporter ici.

L'Académie Royale des Sciences de Paris possede des tables de nombres premiers, qui lui ont été présentées par le P. *Mercastel* de l'Oratoire, & par M. *du Tour ;* mais elles n'ont pas été publiées : il en est parlé dans le tome V des Mémoires étrangers présentés à l'Académie, à l'occasion d'un Mémoire de M. *Rallier des Ourmes*, Conseiller d'Honneur au Présidial de Rennes, qui se trouve dans ce volume, & l'Auteur y expose une méthode facile de trouver les nombres premiers.

On trouve dans le même volume un autre Mémoire de M. *Rallier des Ourmes*, qu'il a intitulé *Méthode nouvelle de division, quand le dividende est multiple du diviseur, & se peut par conséquent diviser sans reste, & d'extraction de racines quand la puissance est parfaite.* Cette méthode plus curieuse à la vérité qu'utile, n'a presque rien de commun avec la méthode ordinaire ; elle est très-facile & elle a cette singularité, que pourvu qu'on connoisse autant de chiffres sur la droite du dividende ou de la puissance, que le quotient ou la racine doivent avoir de chiffres, on peut se passer des chiffres qui les précedent,

on n'y remarque point d'ordre régulier ; leurs augmentations sont tantôt plus grandes, tantôt moindres ; & jusqu'à présent

on n'a pu découvrir si elles se font suivant une certaine loi ou non.

41.

Les nombres composés, qui peuvent être représentés par des facteurs, proviennent tous des nombres premiers susdits, c'est-à-dire que tous leurs facteurs sont des nombres premiers. Car si l'on trouve un facteur qui ne soit pas un nombre premier, on peut toujours le décomposer & le représenter par deux ou plusieurs nombres premiers. Quand on a indiqué, par exemple, le nombre 30 par 5.6, on voit que 6 n'étant pas un nombre premier, mais valant 2.3, on auroit pu indiquer 30 par 5.2.3, ou par 2.3.5; c'est-à-dire, par des facteurs qui sont tous des nombres premiers.

& obtenir de même le quotient. M. *Rallier des Ourmes* s'est ouvert cette nouvelle route au moyen de quelques réflexions sur les nombres qui terminent les expressions numériques des produits ou des puissances, une espece de nombres que j'ai remarqués aussi dans d'autres occasions qu'il étoit utile de considérer.

42.

Si l'on réfléchit maintenant sur ces nombres composés résolubles en nombres premiers, on y remarquera une grande différence; on verra que les uns n'ont que deux de ces facteurs, que d'autres en ont trois, & que d'autres encore en ont un plus grand nombre. Nous avons déjà vu, par exemple, que

4 est autant que 2.2,	6 autant que 2.3,
8 — — — 2.2.2,	9 — — — — 3.3,
10 — — — — 2.5,	12 — — — 2.3.2,
14 — — — — 2.7,	15 — — — — 3.5,
16 — — — 2.2.2.2.	& ainsi de suite.

43.

On conclura aisément de-là comment on doit déterminer les facteurs simples d'un nombre quelconque.

Soit proposé pour exemple le nombre 360, on le représentera d'abord par 2.180. Or 180 est autant que 2.90, &
90 — — — 2.45, &
45 — — — 3.15, & enfin
15 — — — 3.5.

Par conséquent le nombre 360 peut être représenté par les facteurs simples que voici:

2.2.2.3.3.5,

puisque tous ces nombres multipliés ensemble produisent 360 (*).

44.

Nous voyons donc par tout cela, que les nombres premiers ne peuvent pas être divisés par d'autres nombres, & que d'un autre côté on trouve les facteurs simples des nombres composés, le plus commodément & le plus surement, en cherchant les nombres simples, ou premiers, par lesquels ces nombres composés sont divisibles. Mais on a besoin pour cela de la *division*; nous allons donc expliquer, dans le chapitre suivant, les regles de cette opération.

(*) On trouve à la fin d'une Arithmétique Allemande de *Poëtius*, publiée à Leipsick en 1728, une table où tous les nombres depuis 1 jusqu'à 10000 sont représentés de cette maniere par leurs facteurs simples.

CHAPITRE V.

De la division des Quantités simples.

45.

QUAND il s'agit de décomposer un nombre en deux, trois ou plusieurs parties égales, on le fait par le moyen de la *division*, laquelle nous apprend à déterminer la grandeur d'une de ces parties. Quand on veut, par exemple, décomposer le nombre 12 en trois parties égales, on trouve par la division que chacune de ces parties est égale à 4.

Voici quelques expressions dont on se sert dans cette opération. Le nombre qu'on doit décomposer ou diviser, s'appelle le *dividende*; le nombre des parties égales qu'on cherche se nomme le *diviseur*; la grandeur d'une de ces parties, déterminée

par la divifion, s'appelle le *quotient ;* ainfi dans l'exemple cité :

12 eft le *dividende*,
3 eft le *divifeur*, &
4 eft le *quotient.*

46.

Il s'enfuit de-là, que fi l'on divife un nombre par 2 ou en deux parties égales, il faut qu'une de ces parties, ou le quotient, prife deux fois, faffe exactement le nombre propofé ; & pareillement que fi l'on a un nombre à divifer par 3, le quotient pris trois fois doit redonner le même nombre. Il faut en général que la multiplication du quotient par le divifeur reproduife toujours le dividende.

47.

C'eft auffi pourquoi on prefcrit pour la divifion la regle, de chercher un nombre ou quotient tel, qu'étant multiplié par le divifeur, il en réfulte précifément le dividende.

dende. Par exemple, s'il s'agit de divifer 35 par 5, on cherche un nombre qui, multiplié par 5, produife 35. Or ce nombre eft 7, puifque cinq fois 7 fait 35. La façon de parler dont on fait ufage dans ce raifonnement, eft celle-ci : 5 en 35 j'ai 7 fois ; & 5 fois 7 font 35.

48.

On fe repréfente donc le dividende comme un produit, duquel un des facteurs eft égal au divifeur, l'autre facteur indiquant enfuite le quotient. Ainfi en fuppofant qu'on ait 63 à divifer par 7, on cherchera un produit tel, qu'en prenant 7 pour un de fes facteurs, l'autre facteur multiplié par celui-ci donne exactement 63. Or 7.9 eft un tel produit, & par conféquent 9 eft le quotient qu'on obtient en divifant 63 par 7.

49.

S'il eft queftion à préfent de divifer en général un nombre ab par a, il eft évident

que le quotient sera *b*; parce que *a* multiplié par *b* redonne le dividende *ab*. Il est clair aussi que si l'on avoit à diviser *ab* par *b*, le quotient seroit *a*.

Ainsi en général dans tous les exemples de division qu'on peut avoir faits, si l'on divise le dividende par le quotient, on obtiendra de nouveau le diviseur : de même que 24 divisé par 4 donne 6, 24 divisé par 6 donnera 4.

50.

Comme tout se réduit à représenter le dividende par deux facteurs, dont l'un soit égal au diviseur, l'autre au quotient, on comprendra facilement les exemples qui suivent. Je dis d'abord que le dividende *abc*, divisé par *a*, donne *bc*; car *a*, multiplié par *bc*, fait *abc*; pareillement *abc*, étant divisé par *b*, on aura *ac*; & *abc*, divisé par *ac*, donne *b*. Je dis aussi que 12 *mn*, divisé par 3 *m*, fait 4 *n*; car 3 *m*, multiplié par 4 *n*, fait 12 *mn*. Mais si ce

même nombre 12 *mn* avoit dû être divisé par 12, on auroit obtenu le quotient *mn*.

51.

Puisque tout nombre *a* peut être exprime par 1 *a* ou *un a*, il est évident que si l'on avoit à diviser *a* ou 1 *a* par 1, le quotient seroit le même nombre *a*. Mais au contraire, si le même nombre *a* ou 1 *a* doit se diviser par *a*, le quotient sera 1.

52.

Il n'arrive pas toujours qu'on peut représenter le dividende comme le produit de deux facteurs, dont l'un soit égal au diviseur, & la division alors ne peut pas se faire de la maniere que nous avons dit.

Quand on a, par exemple, 24 à diviser par 7, on voit d'abord que le nombre 7 n'est pas un facteur de 24; car 7.3 ne fait que 21, & par conséquent trop peu, & 7.4 fait 28, qui est déjà plus grand que 24. Mais on voit du moins par-là que le quotient

doit être plus grand que 3, & plus petit que 4. Afin donc de le déterminer exactement, on emploie une autre espece de nombres, qu'on nomme les *fractions*, & de laquelle nous traiterons dans un des chapitres suivans.

53.

Avant qu'on passe à l'usage des fractions, on a coutume de se contenter du nombre entier qui approche le plus du quotient véritable, mais en faisant attention au *résidu* qui reste; ainsi l'on dit, 7 en 24 j'ai 3 fois, & le résidu est 3, parce que 3 fois 7 ne fait que 21, & par conséquent 3 de moins que 24. On considérera de la même maniere les exemples suivans:

6	34	5	c'est-à-dire que le diviseur est	6,
	30		que le dividende est	34,
	4		que le quotient est	5,
			& que le résidu est	4,

9	41	4	ici le diviseur est	9,
	36		le dividende est	41,
	5		le quotient est	4,
			& le résidu est	5.

Il faut observer la regle suivante dans les exemples où il reste un résidu.

54.

Quand on multiplie le diviseur par le quotient, & qu'au produit l'on ajoute le résidu, il faut qu'on obtienne le dividende; c'est la maniere de vérifier la division, & de voir si l'on a bien calculé ou non. C'est ainsi que dans le premier des deux derniers exemples, si l'on multiplie 6 par 5, & qu'au produit 30 on ajoute le résidu 4, il vient 34 ou le dividende.

De même dans le dernier exemple, si l'on multiplie le diviseur 9 par le quotient 4, & qu'au produit 36 on ajoute le résidu 5, on obtient le dividende 41.

55.

Il est enfin nécessaire aussi de faire remarquer ici à l'égard des signes + *plus*, & — *moins*, que si l'on divise $+ab$ par $+a$, le quotient sera $+b$, ce qui est évident.

Mais que s'il s'agit de diviser $+ab$ par $-a$, le quotient sera $-b$; parce que $-a$ multiplié par $-b$ fait $+ab$. Ensuite:

Que si le dividende est $-ab$, & qu'il s'agisse de le diviser par le diviseur $+a$, le quotient sera $-b$; parce que c'est $-b$ qui, multiplié par $+a$, fait $-ab$. Enfin, que s'il est question de diviser le dividende $-ab$ par le diviseur $-a$, le quotient sera $+b$; parce que le dividende $-ab$ est le produit de $-a$ par $+b$.

56.

La division admet donc quant aux signes + & — les mêmes regles que nous avons

vu avoir lieu pour la multiplication; à savoir:

+ par + fait +: + par — fait —:
— par + fait —: — par — fait +;

ou en peu de mots, les mêmes signes donnent *plus*, les signes contraires donnent *moins*.

57.

Ainsi quand on divise $18pq$ par $-3p$, le quotient est $-6q$.

De plus: $-30xy$ divisé par $+6y$ donne $-5x$
& $-54abc$ divisé par $-9b$ donne $+6ac$;

car, dans ce dernier exemple, $-9b$ multiplié par $+6ac$ fait $-6.9abc$, ou $-54abc$; mais nous croyons à présent en avoir assez dit sur la division en quantités simples; nous ne tarderons donc pas à passer à l'explication des fractions, après avoir ajouté encore quelques remarques sur la nature des nombres, eu égard à leurs diviseurs.

CHAPITRE VI.

Des propriétés des Nombres entiers par rapport à leurs diviſeurs.

58.

COMME nous avons vu que quelques nombres ſont diviſibles par de certains diviſeurs, pendant que d'autres ne le ſont pas, il eſt néceſſaire pour parvenir à une connoiſſance plus particuliere des nombres, de bien faire attention à cette différence, tant en diſtinguant les nombres diviſibles par des diviſeurs de ceux qui ne le ſont pas, qu'en conſidérant le réſidu qui reſte dans la diviſion de ces derniers. Pour cet effet examinons les diviſeurs:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, &c.

59.

Soit d'abord le diviſeur 2; les nombres qui peuvent être diviſés par celui-là ſont:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, &c.

leſquels, comme on voit, croiſſent toujours de deux unités. On appelle ces nombres, quelque loin qu'ils puiſſent ſe continuer, des *nombres pairs*.

Mais il eſt d'autres nombres; à ſavoir:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, &c.

qui ſont toujours d'une unité plus petits ou plus grands que ceux-là, & qu'on ne peut diviſer par 2, ſans qu'il reſte le réſidu 1; on nomme ceux-ci les *nombres impairs*.

Les nombres pairs ſont tous compris dans la formule générale $2a$; car on les obtient tous en mettant ſucceſſivement à la place de a les nombres entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. & de-là il s'enſuit que les nombres impairs ſont tous compris dans la formule $2a+1$, parce que $2a+1$ eſt d'une unité plus grand que le nombre pair $2a$.

60.

En ſecond lieu, ſoit pour diviſeur le nombre 3: les nombres diviſibles par ce diviſeur ſont,

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, & ainſi de ſuite.

Et ces nombres peuvent se représenter par la formule $3a$; car $3a$ divisé par 3 donne le quotient a sans résidu. Tous les autres nombres au contraire qu'on voudroit diviser par 3, donneront 1 ou 2 de résidu, & sont par conséquent de deux sortes. Ceux qui après la division laissent le reste 1, sont:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c.

& sont contenus dans la formule $3a+1$; mais l'autre espece, où les nombres qui donnent le reste 2, sont:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, &c.

& la formule qui les exprime généralement est $3a+2$; de façon donc que tous les nombres peuvent s'indiquer ou par $3a$, ou par $3a+1$, ou par $3a+2$.

61.

Supposons maintenant que 4 soit le diviseur en question, les nombres qu'il divise sont:

4, 8, 12, 16, 20, 24, &c.

lesquels augmentent réguliérement par 4,

& sont contenus dans la formule $4a$. Les autres nombres, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas divisibles par 4, peuvent laisser le résidu 1, ou être de 1 plus grands que ceux-là: comme

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, &c.

& être par conséquent compris dans la formule $4a+1$:

ou bien ils peuvent donner le résidu 2; comme

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, &c.

& s'exprimer par la formule $4a+2$; ou enfin ils donneront le reste 3; comme

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, &c.

& seront indiqués par la formule $4a+3$.

Tous les nombres entiers possibles sont donc contenus dans l'une ou l'autre de ces quatre expressions:

$4a$, $4a+1$, $4a+2$, $4a+3$.

62.

Il en eſt à peu près de même quand le diviſeur eſt 5 ; car tous les nombres diviſibles par celui-là ſont contenus dans la formule $5a$, & ceux qu'on ne peut diviſer par 5, reviennent à une des formules qui ſuivent :

$$5a+1,\ 5a+2,\ 5a+3,\ 5a+4;$$

& c'eſt de la même maniere qu'on pourra continuer & conſidérer de plus grands diviſeurs.

63.

Il eſt à propos de ſe rappeller ici ce qui a été dit plus haut de la réſolution des nombres en leurs facteurs ſimples ; car tout nombre, parmi les facteurs duquel ſe trouve

2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 7,

ou un autre nombre quelconque, ſera diviſible par ces nombres. Par exemple :

60 étant autant que 2.2.3.5,

il eſt clair que 60 eſt diviſible par 2, & par 3 & par 5 (*).

(*) Il y a quelques nombres qu'on voit aſſez facilement être diviſeurs ou non d'un nombre propoſé.

Un nombre propoſé eſt diviſible par 2, ſi le dernier chiffre eſt pair; il eſt diviſible par 4, ſi les deux derniers chiffres ſont diviſibles par 4 ; il eſt diviſible par 8, ſi les trois derniers chiffres ſont diviſibles par 8 ; & en général il eſt diviſible par 2^n, ſi les n derniers chiffres ſont diviſibles par 2^n.

Un nombre eſt diviſible par 3, ſi la ſomme des chiffres eſt diviſible par 3 ; il ſe diviſe par 6, ſi outre cela le dernier chiffre eſt pair ; il eſt diviſible par 9, ſi la ſomme des chiffres peut ſe diviſer par 9.

Tout nombre dont le dernier chiffre eſt 0 ou 5, eſt diviſible par 5.

Un nombre eſt diviſible par 11, lorſque la ſomme du premier, du troiſieme, du cinquieme, &c. chiffre eſt égale à la ſomme du ſecond, du quatrieme, du ſixieme, &c. chiffre.

Il eſt aſſez facile de ſe rendre raiſon de ces regles, & de les étendre aux produits des diviſeurs que nous venons de conſidérer ; on peut imaginer auſſi des regles pour quelques autres nombres, mais l'application en ſeroit ordinairement plus longue que l'eſſai de la diviſion réelle.

Je dis, par exemple, que le nombre 53704689213 eſt diviſible par 7, parce que je trouve que la ſomme des chiffres du nombre 64004245433 eſt diviſible par 7 ; c'eſt

64.

De plus, comme la formule générale *abcd* eſt non-ſeulement diviſible par *a*, & *b*, & *c*, & *d*, mais auſſi par
ab, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*, & par
abc, *abd*, *acd*, *bcd*, & enfin par
abcd, c'eſt-à-dire, par ſa propre valeur ; il s'enſuit que 60, ou 2.2.3.5, peut ſe diviſer non-ſeulement par ces nombres ſimples, mais auſſi par ceux qui ſont compoſés de deux nombres ſimples, c'eſt-à-dire, par 4, 6, 10, 15.

Et pareillement par ceux qui ſont compoſés de trois facteurs ſimples, c'eſt à-dire par 12, 20, 30, & enfin auſſi, par 60 même.

65.

Quand on aura donc repréſenté un nom-

que ce ſecond nombre eſt formé, ſuivant une regle aſſez ſimple, des réſidus qu'on trouve en diviſant par 7 les nombres 10, 100, 1000, &c. 20, 200, 2000, &c. juſqu'à 60, 600, 6000, &c.

bre pris à volonté, par ſes facteurs ſimples, il ſera très-facile d'indiquer tous les nombres par leſquels celui-là pourra être diviſé. Car on n'a qu'à prendre d'abord les facteurs ſimples un à un, & enſuite les multiplier enſemble deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. juſqu'à ce qu'on arrive au nombre propoſé.

66.

Il faut remarquer ici avant toutes choſes, que tout nombre eſt diviſible par 1 ; & de même que tout nombre eſt diviſible par lui-même ; de ſorte donc que chaque nombre a au moins deux facteurs ou diviſeurs ; à ſavoir ce nombre même & l'unité ; mais tout nombre qui n'a pas d'autre diviſeur que ces deux, appartient à la claſſe des nombres que nous avons nommés plus haut *nombres ſimples* ou *premiers*.

Hors ceux-là tous les autres nombres compoſés ont, outre l'unité & ſoi-même, d'autres diviſeurs, comme on peut le voir

par la table ſuivante, dans laquelle on a mis ſous chaque nombre tous ſes diviſeurs (*).

TABLE.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	2	5	2	7	2	3	2	11	2	13	2	3	2	17	2	19	2
			4		3		4	9	5		3		7	5	4		3		4
					6		8		10		4		14	15	8		6		5
											6				16		9		10
											12						18		20
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
p.	p.	p.		p.		p.				p.		p.				p.		p.	

67.

Enfin l'on doit obſerver que o, ou *zéro*, peut être regardé comme un nombre qui

(*) On a une pareille table pour tous les diviſeurs des nombres naturels, depuis 1 juſqu'à 10000, qui a été publiée à Leyde en 1767 par M. *Henri Anjema*. On a encore une autre table de diviſeurs, qui va juſqu'à 100000; mais dans laquelle il n'y a que le plus petit diviſeur de chaque nombre. Elle ſe trouve dans le Dictionnaire Anglois de *Harris*, dans le Dictionnaire Encyclopédique & dans le Recueil de M. *Lambert*, que nous avons déjà cité à l'article 40. Elle eſt même continuée dans ce dernier Ouvrage juſqu'à 102000.

a la

a la propriété d'être diviſible par tous les nombres poſſibles; parce que par quelque nombre *a* que l'on ait à diviſer o, le quotient ſe trouve toujours être o; car il faut bien remarquer que la multiplication d'un nombre quelconque par *zéro* ne produit rien, & qu'ainſi o fois *a*, ou o*a*, eſt o.

CHAPITRE VII.

Des Fractions en général.

68.

QUAND un nombre, comme 7, par exemple, eſt dit n'être pas diviſible par un autre nombre, ſuppoſons par 3, cela veut ſeulement dire que le quotient ne peut pas être exprimé par un nombre entier, & il ne faut point du tout croire qu'on ne puiſſe pas ſe faire une idée de ce quotient.

On n'a qu'à s'imaginer une ligne longue de 7 pieds, perſonne ne doutera qu'il ne

ſoit poſſible de diviſer cette ligne en 3 parties égales, & de ſe faire une idée de la longueur d'une de ces parties.

69.

Puis donc qu'on peut ſe faire une idée nette du quotient qu'on obtient dans des cas ſemblables, quoique ce quotient ne ſoit pas un nombre entier, on ſe trouve conduit par là à conſidérer une eſpece particuliere de nombres, qu'on nomme *fractions* ou *nombres rompus*.

L'exemple allégué en fournit une preuve. S'il s'agit de diviſer 7 par 3, on ſe repréſente facilement le quotient qui doit en réſulter, & on l'exprime par $\frac{7}{3}$; en mettant le diviſeur ſous le dividende, & en ſéparant les deux nombres par un trait.

70.

Ainſi quand en général le nombre a doit être diviſé par le nombre b, on indique le quotient par $\frac{a}{b}$, & on appelle cette façon

de s'exprimer, une *fraction*. On ne peut donc donner mieux une idée d'une fraction $\frac{a}{b}$, qu'en diſant qu'on indique de cette maniere le quotient qui provient de la diviſion du nombre ſupérieur par le nombre inférieur. Il faut ſe ſouvenir auſſi que dans toutes ces fractions le nombre inférieur ſe nomme le *dénominateur*, & que celui qui eſt au-deſſus du trait s'appelle le *numérateur*.

71.

Dans la fraction citée, $\frac{7}{3}$, qu'on prononce ſept tiers, 7 eſt donc le numérateur, & 3 eſt le dénominateur.

Il faut de même prononcer

$\frac{2}{3}$, deux tiers; $\frac{3}{4}$, trois quarts;
$\frac{3}{8}$, trois huitiemes; $\frac{12}{100}$, douze centiemes;
mais $\frac{1}{2}$ ſe prononce un demi, & non pas un deuxieme.

72.

Afin de parvenir à une connoiſſance plus parfaite de la nature des fractions, nous

commencerons par confidérer le cas où le numérateur eft égal au dénominateur, comme dans $\frac{a}{a}$. Or puifqu'on indique par là le quotient qu'on obtient, quand on divife a par a, il eft clair que ce quotient eft exactement l'unité, & que par conféquent cette fraction $\frac{a}{a}$ vaut autant que 1, ou un entier; il s'enfuit de plus que toutes les fractions qui fuivent:

$$\frac{2}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{5},\ \frac{6}{6},\ \frac{7}{7},\ \frac{8}{8},\ \&c.$$

font toutes égales en valeur l'une à l'autre, valant chacune 1, ou un entier.

73.

Nous venons de voir qu'une fraction qui a le numérateur égal au dénominateur, vaut l'unité. Il faut donc que toutes les fractions dont les numérateurs font plus petits que les dénominateurs, ayent une valeur moindre que l'unité. Car fi j'ai un nombre à divifer par un autre qui eft plus grand, il me vient néceffairement moins que 1: une ligne, par exemple, de deux pieds de long,

devant être coupée en trois parties, une feule de ces parties fera fans contredit plus courte qu'un pied; il eft donc évident que $\frac{2}{3}$ eft plus petit que 1, & cela par la même raifon que le numérateur 2 eft plus petit que le dénominateur 3.

74.

Si le numérateur eft au contraire plus grand que le dénominateur, la valeur de la fraction eft plus grande que l'unité. C'eft ainfi que $\frac{3}{2}$ vaut plus que 1; car $\frac{3}{2}$ eft autant que $\frac{2}{2}$ & encore $\frac{1}{2}$. Or $\frac{2}{2}$ eft autant que 1, par conféquent $\frac{3}{2}$ vaut $1\frac{1}{2}$, c'eft-à-dire, un entier & encore un demi. De même $\frac{4}{3}$ valent $1\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$ valent $1\frac{2}{3}$, & $\frac{7}{3}$ valent $2\frac{1}{3}$. Et en général il fuffit dans ces cas de divifer le nombre fupérieur par l'inférieur, & de joindre au quotient une fraction qui ait le réfidu pour numérateur, & le divifeur pour dénominateur. Si la fraction donnée étoit, par exemple, $\frac{43}{12}$, on auroit au quotient 3, & 7 pour réfidu; d'où l'on

concluroit que $\frac{43}{12}$ eſt la même choſe que $3\ \frac{7}{12}$.

75.

On voit par-là comment les fractions, dont les numérateurs ſurpaſſent les dénominateurs, ſe réſolvent en deux membres, l'un deſquels eſt un nombre entier, & l'autre un nombre rompu, dont le numérateur eſt plus petit que le dénominateur. On nomme ces fractions, qui contiennent un ou pluſieurs entiers, *des fractions impropres* par oppoſition aux fractions réelles ou proprement dites, qui ayant le numérateur plus petit que le dénominateur, ſont moindres que l'unité ou qu'un entier.

76.

On a coutume de ſe faire une idée de la nature des fractions encore d'une autre maniere, qui éclaircit aſſez bien la choſe. Si l'on conſidere, par exemple, la fraction $\frac{3}{4}$, il eſt évident qu'elle eſt trois fois plus

grande que $\frac{1}{4}$. Or cette fraction $\frac{1}{4}$ ſignifie que ſi l'on partage 1 en 4 parties égales, ce ſera-là la valeur d'une de ces parties; il eſt donc clair qu'en prenant enſemble 3 de ces parties, on aura la valeur de la fraction $\frac{3}{4}$.

On peut conſidérer de la même maniere toute autre fraction, par exemple, $\frac{7}{12}$; ſi l'on partage l'unité en 12 parties égales, 7 de ces parties équivaudront à la fraction propoſée.

77.

C'eſt auſſi à cette maniere de repréſenter les fractions, que les dénominations ſuſdites de numérateur & de dénominateur doivent leur origine. Car, comme dans la fraction précédente $\frac{7}{12}$, le nombre qui eſt ſous le trait indique que c'eſt en 12 parties que l'unité doit ſe diviſer; par conſéquent, comme il déſigne ou *nomme* ces parties, on ne l'a pas nommé ſans raiſon *le dénominateur.*

De plus, comme le nombre supérieur, savoir 7, indique que pour avoir la valeur de la fraction il faut prendre ou rassembler 7 de ces parties, & que par conséquent il les compte pour ainsi dire, on a jugé à propos de nommer ce nombre qui est au-dessus du trait, *le numérateur*.

78.

Puisqu'il est aisé de comprendre ce que c'est que $\frac{3}{4}$, quand on sait ce que signifie $\frac{1}{4}$, nous pouvons considérer les fractions dont le numérateur est l'unité, comme faisant le fondement de toutes les autres. Telles sont les fractions

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}$, &c.

& il faut remarquer que ces fractions vont toujours en diminuant; car plus vous divisez un entier, ou plus le nombre des parties que vous en faites est grand, plus au contraire chacune de ces parties devient petite. C'est ainsi que $\frac{1}{100}$ est plus petit que $\frac{1}{10}$; que $\frac{1}{1000}$ plus petit que $\frac{1}{100}$; & $\frac{1}{10000}$ plus petit que $\frac{1}{1000}$.

79.

On a vu que plus on augmente le dénominateur de pareilles fractions, & plus leurs valeurs deviennent petites. On pourroit donc demander s'il ne seroit pas possible de faire ce dénominateur si grand, que la fraction se réduisît à rien? Nous répondrons que non; car en combien de parties, innombrables même, que vous divisiez l'unité; par exemple, la longueur d'un pied, ces parties ne laisseront pas de conserver une certaine grandeur, & ne seront par conséquent jamais absolument rien.

80.

Il est vrai que si l'on divise la longueur d'un pied en 1000 parties, par exemple; ces parties ne tomberont plus facilement sous nos sens. Mais regardez-les par un bon microscope, elles paroîtront assez grandes pour pouvoir être divisées encore en 100 parties & davantage.

Il ne s'agit cependant pas du tout ici de ce qu'il dépend de nous de faire, ou de ce que nous sommes capables d'exécuter réellement, & de ce que nos yeux peuvent appercevoir; il est question plutôt de ce qui est possible en soi-même. Or il est certain dans ce sens, que quelque grand qu'on veuille supposer le dénominateur, la fraction pourtant ne s'évanouira jamais entiérement, ou ne deviendra jamais tout-à-fait égale à o.

81.

On n'arrive donc jamais entiérement à rien, quelque grand qu'on fasse le dénominateur; & ces fractions conservant toujours encore une certaine grandeur, on peut continuer, sans jamais cesser, la suite de fractions de l'article 78. Cette propriété a fait dire qu'il faudroit que le dénominateur fût *infini* ou infiniment grand, pour que la fraction se réduisît enfin à o, ou à rien; & ce mot d'*infini* signifie en effet

ici qu'on ne parviendroit jamais à une fin avec la suite desdites fractions.

82.

On se sert pour représenter cette idée, qui est très-fondée, du signe ∞, lequel par conséquent signifie un nombre infiniment grand; & on peut donc dire que cette fraction $\frac{1}{\infty}$ est un rien réel, par la raison même qu'une fraction ne sauroit se réduire à rien, aussi long-temps que le dénominateur n'a pas été augmenté à l'infini.

83.

Il est d'autant plus nécessaire de faire attention à cette idée de l'infini, qu'elle est déduite des premiers fondemens de nos connoissances, & qu'elle sera de la plus grande importance dans ce qui suivra.

Nous pouvons ici déjà en tirer des conséquences aussi belles que dignes de notre attention.

La fraction $\frac{1}{\infty}$ indique le quotient de la

division du dividende 1 par le diviseur ∞. Or nous savons qu'en divisant le dividende 1 par le quotient $\frac{1}{\infty}$, qui est, comme nous avons vu, autant que 0, on retrouve le diviseur ∞ : voici donc une nouvelle notion de l'infini que nous acquérons ; nous apprenons qu'il provient de la division de 1 par 0 ; & l'on est par conséquent fondé à dire, que 1 divisé par 0 indique un nombre infiniment grand ou ∞.

84.

Il est nécessaire encore ici de dissiper l'erreur assez commune de ceux qui prétendent qu'un infiniment grand n'est pas susceptible d'augmentation.

Cette opinion ne sauroit subsister avec les principes solides que nous venons d'établir ; car $\frac{1}{0}$ signifiant un nombre infiniment grand, & $\frac{2}{0}$ étant incontestablement le double de $\frac{1}{0}$, il est clair qu'un nombre, quoique infiniment grand, peut devenir encore deux ou plusieurs fois plus grand.

CHAPITRE VIII.

Des propriétés des Fractions.

85.

Nous avons vu plus haut que chacune des fractions,

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}, \&c.$$

fait un entier, & que par conséquent elles sont toutes égales entr'elles. La même égalité regne dans les fractions qui suivent,

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{12}{6}, \&c.$$

chacune d'elles faisant deux entiers ; car le numérateur de chacune divisé par son dénominateur, donne 2. De même toutes ces fractions

$$\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \frac{15}{5}, \frac{18}{6}, \&c.$$

sont égales entr'elles, puisqu'elles ont 3 pour valeur commune.

86.

On peut pareillement repréſenter la valeur d'une fraction quelconque, d'une infinité de manieres. Car ſi l'on multiplie tant le numérateur que le dénominateur d'une fraction par un même nombre, que l'on peut prendre à volonté, cette fraction n'en conſervera pas moins la même valeur. C'eſt par cette raiſon que toutes ces fractions

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{8}{16}, \frac{9}{18}, \frac{10}{20}$, &c.

ſont égales entr'elles, chacune valant $\frac{1}{2}$. De même

$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \frac{8}{24}, \frac{9}{27}, \frac{10}{30}$, &c.

ſont des fractions égales, & dont chacune vaut $\frac{1}{3}$. Les fractions

$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \frac{14}{21}, \frac{16}{24}$, &c.

ont pareillement toutes une même valeur; & on peut conclure enfin en général que la fraction $\frac{a}{b}$ peut être repréſentée par les expreſſions ſuivantes, dont chacune équivaut à $\frac{a}{b}$; ſavoir:

$\frac{a}{b}, \frac{2a}{2b}, \frac{3a}{3b}, \frac{4a}{4b}, \frac{5a}{5b}, \frac{6a}{6b}$, &c.

87.

Pour s'en convaincre on n'a qu'à écrire pour la valeur de la fraction $\frac{a}{b}$ une certaine lettre c, en entendant par cette lettre c le quotient de la diviſion de a par b; & ſe rappeller que la multiplication du quotient c par le diviſeur b, doit donner le dividende. Car puiſque c multiplié par b donne a, il eſt clair que c multiplié par $2b$ donnera $2a$, que c multiplié par $3b$ donnera $3a$, & qu'ainſi en général c multiplié par mb doit donner ma. Or changeant maintenant ceci en un exemple de diviſion, & diviſant le produit ma par mb, l'un des facteurs, il faut que le quotient ſoit égal à l'autre facteur c; mais ma diviſé par mb donne auſſi la fraction $\frac{ma}{mb}$, laquelle eſt par conſéquent égale à c; & voilà ce qu'il s'agiſſoit de prouver: car c ayant été adopté pour la valeur de la fraction $\frac{a}{b}$, il eſt évident que cette fraction eſt égale à la fraction $\frac{ma}{mb}$, quelque valeur que l'on donne à m.

88.

Nous avons vu que toute fraction peut être représentée sous une infinité de formes, dont chacune contient la même valeur; & il est indubitable que de toutes ces formes, c'est celle qui sera composée des plus petits nombres, dont on saisira le mieux la signification. Par exemple, on pourroit mettre au lieu de $\frac{2}{3}$ les fractions suivantes,

$\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$, &c.

mais il n'est pas douteux que $\frac{2}{3}$ ne soit toujours de toutes ces expressions celle dont il est le plus facile de se faire une idée. Il se présente donc ici la question comment une fraction, comme $\frac{8}{12}$, qui n'est pas exprimée par les plus petits nombres possibles, peut être réduite à sa forme la plus simple ou à *ses moindres termes*, c'est-à-dire dans notre exemple, à $\frac{2}{3}$.

89.

Il sera facile de résoudre cette question, si l'on considere qu'une fraction ne laisse pas

pas de conserver sa valeur, quand on multiplie ses deux termes, ou son numérateur & son dénominateur, par un même nombre. Car de-là il s'ensuit qu'aussi en divisant le numérateur & le dénominateur d'une fraction par un même nombre, cette fraction doit conserver la même valeur. Cela se voit encore plus clairement par le moyen de la formule générale $\frac{ma}{mb}$; car si l'on divise tant le numérateur ma que le dénominateur mb par le nombre m, on obtient la fraction $\frac{a}{b}$, laquelle, comme on l'a prouvé ci-dessus, est égale à $\frac{ma}{mb}$.

90.

Afin donc de réduire une fraction proposée à ses moindres termes, il s'agit de trouver un nombre par lequel tant le numérateur que le dénominateur puisse être divisé. Un nombre de cette espece se nomme un *commun diviseur*, & aussi long-temps qu'on peut indiquer un commun diviseur entre le numérateur & le dénominateur,

il est certain que la fraction peut être réduite à une expression plus petite ; mais quand on voit au contraire qu'à l'exception de l'unité aucun autre commun diviseur ne sauroit avoir lieu, c'est signe que la fraction se trouve déjà sous la forme la plus simple qu'il est possible.

91.

Pour rendre ceci plus clair, considérons la fraction $\frac{48}{120}$. Nous voyons d'abord que les deux termes se divisent par 2, & qu'il en résulte la fraction $\frac{24}{60}$. Ensuite qu'on peut de nouveau diviser par 2, & réduire la fraction à $\frac{12}{30}$; & celle-ci ayant encore 2 pour commun diviseur, il est clair qu'on peut la réduire à $\frac{6}{15}$. Mais à présent l'on s'apperçoit facilement que le numérateur & le dénominateur sont encore divisibles par 3 ; faisant donc cette division on obtient la fraction $\frac{2}{5}$, laquelle est égale à la fraction proposée, & indique l'expression la plus simple à laquelle on puisse la réduire ; car 2 & 5 n'ont que le commun

diviseur 1, lequel ne peut diminuer ces nombres davantage.

92.

Cette propriété qu'ont les fractions, de garder une valeur invariable, soit qu'on divise ou qu'on multiplie le numérateur & le dénominateur par un même nombre ; cette propriété, dis-je, est de la plus grande importance & fait le principe fondamental de tout ce qu'on enseigne sur les fractions. On ne peut guere, par exemple, ajouter ensemble deux fractions, ou les soustraire l'une de l'autre, avant que, moyennant cette propriété, on les ait réduites à d'autres formes, c'est-à-dire à des expressions dont les dénominateurs soient égaux. C'est de quoi nous parlerons dans le chapitre suivant.

93.

Nous finirons celui-ci par la remarque, qu'on peut aussi représenter tous les nombres entiers par des fractions. Par exemple, 6

eſt autant que $\frac{6}{1}$, parce que 6 diviſé par 1 fait 6 ; & on peut de la même maniere exprimer ce nombre 6 par les fractions $\frac{12}{2}$, $\frac{18}{3}$, $\frac{24}{4}$, $\frac{36}{6}$, & une infinité d'autres qui ont la même valeur.

CHAPITRE IX.

De l'addition & de la ſouſtraction des Fractions.

94.

LORSQUE les fractions ont des dénominateurs égaux, il n'y a aucune difficulté à les ajouter & à les ſouſtraire ; car $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ eſt autant que $\frac{5}{7}$, & $\frac{4}{7} - \frac{2}{7}$ autant que $\frac{2}{7}$. On n'opere dans ce cas, ſoit pour l'addition, ſoit pour la ſouſtraction, que ſur les numérateurs, & on met ſous le trait le dénominateur commun ; ainſi

$\frac{7}{100} + \frac{9}{100} - \frac{12}{100} - \frac{15}{100} + \frac{20}{100}$ fait $\frac{9}{100}$;

$\frac{24}{50} - \frac{7}{50} - \frac{12}{50} + \frac{31}{50}$ fait $\frac{36}{50}$ ou $\frac{18}{25}$;

$\frac{16}{20} - \frac{3}{20} - \frac{11}{20} + \frac{14}{20}$ fait $\frac{16}{20}$ ou $\frac{4}{5}$;

de même $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ font $\frac{3}{3}$ ou 1, c'eſt-à-dire un entier ; & $\frac{2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ font $\frac{0}{4}$, c'eſt-à-dire rien, ou 0.

95.

Mais quand les fractions n'ont pas des dénominateurs égaux, il eſt toujours poſſible de les transformer en d'autres fractions qui ayent un même dénominateur. Par exemple, quand on propoſe d'ajouter enſemble les fractions $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, il faut conſidérer que $\frac{1}{2}$ eſt autant que $\frac{3}{6}$, & que $\frac{1}{3}$ équivaut à $\frac{2}{6}$; nous avons donc à la place des deux fractions propoſées ces deux autres, $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$, dont la ſomme fait $\frac{5}{6}$. Si les deux fractions étoient jointes par le ſigne *moins*, comme $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, on auroit $\frac{3}{6} - \frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{6}$.

Autre exemple : Soient les fractions propoſées $\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$; puiſque $\frac{3}{4}$ eſt la même choſe que $\frac{6}{8}$, on peut lui ſubſtituer cette valeur & dire $\frac{6}{8} + \frac{5}{8}$ font $\frac{11}{8}$ ou $1\frac{3}{8}$.

Suppoſez qu'on demande encore ce que donnent $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ajoutés enſemble, je dis que c'eſt $\frac{7}{12}$; car $\frac{1}{3}$ fait $\frac{4}{12}$, & $\frac{1}{4}$ fait $\frac{3}{12}$.

96.

Il peut arriver qu'on ait un plus grand nombre de fractions à réduire à un même dénominateur; par exemp. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, tout se réduit alors à trouver un nombre qui soit divisible par tous les dénominateurs de ces fractions. 60 est ici le nombre qui a cette propriété, & qui devient par conséquent le dénominateur commun. Nous aurons donc $\frac{30}{60}$ au lieu de $\frac{1}{2}$; $\frac{40}{60}$ au lieu de $\frac{2}{3}$; $\frac{45}{60}$ au lieu de $\frac{3}{4}$; $\frac{48}{60}$ au lieu de $\frac{4}{5}$, & $\frac{50}{60}$ au lieu de $\frac{5}{6}$. S'il s'agit à présent d'ajouter ensemble toutes ces fractions $\frac{30}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, $\frac{50}{60}$; on ne fait qu'ajouter tous les numérateurs, & on donne à la somme le dénominateur commun 60; c'est-à-dire qu'on aura $\frac{213}{60}$, ou 3 entiers & $\frac{33}{60}$, ou 3 $\frac{11}{20}$.

97.

Tout se réduit ici, nous le répétons, à transformer deux fractions dont les dénominateurs sont inégaux, en deux autres

dont les dénominateurs sont égaux. Pour faire donc cette opération d'une maniere générale, soient $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ les fractions proposées. Qu'on multiplie d'abord les deux termes de la premiere par d, on aura la fraction $\frac{ad}{bd}$ égale à $\frac{a}{b}$; qu'on multiplie ensuite les deux termes de la seconde fraction par b, on en aura une valeur équivalente exprimée par $\frac{bc}{bd}$; & voilà les deux dénominateurs devenus égaux. Maintenant si l'on demande quelle est la somme des deux fractions proposées, on peut répondre aussi-tôt que c'est $\frac{ad+bc}{bd}$; & s'il est question de la différence, on dit qu'elle est $\frac{ad-bc}{bd}$. S'il s'agissoit, par exemple, des fractions $\frac{5}{8}$ & $\frac{7}{9}$, on obtiendroit à leur place $\frac{45}{72}$ & $\frac{56}{72}$, dont la somme est $\frac{101}{72}$, & dont la différence est $\frac{11}{72}$.

98.

C'est à cette matiere aussi qu'appartient la question, laquelle de deux fractions proposées est la plus grande ou la plus petite? car, pour y répondre, on n'a qu'à réduire

ces deux fractions au même dénominateur. Prenons pour exemple les deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{7}$; si on les réduit au même dénominateur, la premiere devient $\frac{14}{21}$, & la seconde $\frac{15}{21}$, & il est évident à présent que c'est la seconde, ou $\frac{5}{7}$, qui est la plus grande, & que c'est de $\frac{1}{21}$ qu'elle surpasse la premiere.

Soient proposées encore les deux fractions $\frac{3}{5}$ & $\frac{5}{8}$, on aura à leur place celles-ci, $\frac{24}{40}$ & $\frac{25}{40}$; d'où l'on peut inférer que $\frac{5}{8}$ surpasse $\frac{3}{5}$, mais seulement de $\frac{1}{40}$.

99.

Lorsqu'il est question de soustraire une fraction d'un nombre entier, il suffit de convertir une des unités de ce nombre entier en une fraction qui ait le même dénominateur que celle qu'il faut soustraire, le reste se fait sans difficulté. Qu'il s'agisse, par exemple, de soustraire $\frac{2}{3}$ de 1, on écrira $\frac{3}{3}$ au lieu de 1, & on dira $\frac{2}{3}$ ôté de $\frac{3}{3}$ laisse $\frac{1}{3}$ de reste. De même $\frac{5}{12}$, soustrait de 1, laisse $\frac{7}{12}$.

S'il s'agissoit de soustraire $\frac{3}{4}$ de deux, on écriroit 1 & $\frac{4}{4}$ au lieu de 2, & on verroit d'abord qu'il doit rester après la soustraction $1\frac{1}{4}$.

100.

Il arrive aussi quelquefois qu'ayant ajouté ensemble deux ou plusieurs fractions, on obtient plus d'un entier, c'est-à-dire, un numérateur plus grand que le dénominateur; c'est un cas qui s'est même déjà présenté & auquel il faut faire attention.

Nous avons trouvé, par exemple, à l'article 96 que la somme des cinq fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ & $\frac{5}{6}$ étoit $\frac{213}{60}$, & nous avons fait observer que cette somme signifioit 3 entiers & $\frac{33}{60}$ ou $\frac{11}{20}$. De même $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ ou $\frac{8}{12} + \frac{9}{12}$ font $\frac{17}{12}$ ou $1\frac{5}{12}$. Il n'y a qu'à faire la division réelle du numérateur par le dénominateur, voir combien d'entiers viennent au quotient, & tenir compte du résidu.

On fera de même à peu près pour ajouter ensemble des quantités composées de

nombres entiers & de fractions ; on ajoutera d'abord les fractions, & si leur somme fait un ou plusieurs entiers, on les ajoute aux autres entiers. Qu'il soit question, par exemple, d'ajouter $3\frac{1}{2}$ & $2\frac{2}{3}$, on prend d'abord la somme de $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$, ou de $\frac{3}{6}$ & $\frac{4}{6}$. Elle est $\frac{7}{6}$ ou $1\frac{1}{6}$; donc la somme totale est $6\frac{1}{6}$.

CHAPITRE X.

De la multiplication & de la division des Fractions.

101.

LA regle pour la multiplication d'une fraction par un nombre entier, est de ne multiplier par ce nombre que le numérateur, & de ne rien changer au dénominateur ; ainsi

2 fois $\frac{1}{2}$ fait $\frac{2}{2}$ ou 1 entier ;

2 fois $\frac{1}{3}$ fait $\frac{2}{3}$; &

3 fois $\frac{1}{6}$ fait $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$;

4 fois $\frac{5}{12}$ fait $\frac{20}{12}$ ou $1\frac{8}{12}$ ou $1\frac{2}{3}$.

On peut cependant, au lieu de cette regle, employer aussi celle de diviser le dénominateur par le nombre entier donné ; & il est bon de s'en servir, quand cela se peut, parce qu'on abrege par-là le calcul. Qu'il s'agisse, par exemple, de multiplier $\frac{8}{9}$ par 3 ; si l'on multiplie le numérateur par le nombre entier, on obtient $\frac{24}{9}$, lequel produit se réduit à $\frac{8}{3}$. Mais si l'on ne change rien au numérateur & qu'on divise le dénominateur par le nombre entier, on trouve immédiatement $\frac{8}{3}$ ou $2\frac{2}{3}$ pour le produit cherché. De même $\frac{13}{24}$ multipliés par 6 donnent $\frac{13}{4}$ ou $3\frac{1}{4}$.

102.

En général donc, le produit de la multiplication d'une fraction $\frac{a}{b}$ par c est $\frac{ac}{b}$, & on peut remarquer que quand le nombre entier est précisément égal au dénominateur, le produit doit être égal au numérateur.

En effet

$\frac{1}{2}$ pris 2 fois donne 1 ;
$\frac{2}{3}$ pris 3 fois donne 2 ;
$\frac{3}{4}$ pris 4 fois donne 3.

Et en général, si l'on multiplie la fraction $\frac{a}{b}$ par le nombre b, le produit doit être a, comme on l'a déjà fait sentir plus haut; car puisque $\frac{a}{b}$ indique le quotient de la division du dividende a par le diviseur b, & qu'on a démontré que le quotient multiplié par le diviseur doit donner le dividende, il est clair que $\frac{a}{b}$ multiplié par b doit produire a.

103.

Nous avons vu comment on doit multiplier une fraction par un nombre entier, voyons à présent aussi comment il faut diviser une fraction par un nombre entier; cette recherche est nécessaire avant que nous passions à la multiplication des fractions par des fractions. Or il est clair que si j'ai à diviser la fraction $\frac{2}{3}$ par 2, il doit me venir $\frac{1}{3}$; & que le quotient de $\frac{6}{7}$ divisé par 3 est $\frac{2}{7}$. La regle est donc, qu'il faut diviser le numérateur par le nombre entier sans changer le dénominateur. Ainsi:

$\frac{12}{25}$ divisé par 2 donne $\frac{6}{25}$; &
$\frac{12}{25}$ divisé par 3 donne $\frac{4}{25}$; &
$\frac{12}{25}$ divisé par 4 donne $\frac{3}{25}$, &c.

104.

Cette regle peut être pratiquée sans difficulté, pourvu que le numérateur soit divisible par le nombre proposé; mais fort souvent il ne l'est pas; il faut donc observer qu'on peut transformer une fraction en un nombre infini d'autres expressions, & que dans ce nombre il ne peut manquer d'y en avoir de telles, que le numérateur puisse être divisé par le nombre entier donné. S'il s'agissoit, par exemple, de diviser $\frac{3}{4}$ par 2, on changeroit la fraction en $\frac{6}{8}$, & divisant maintenant le numérateur par 2, on auroit aussi-tôt $\frac{3}{8}$ pour le quotient cherché.

En général, s'il est question de diviser

la fraction $\frac{a}{b}$ par c, on la transformera en celle-ci $\frac{ac}{bc}$, & divisant ensuite le numérateur ac par c, on écrira $\frac{a}{bc}$ pour le quotient cherché.

105.

Nous voyons donc que dans le cas où une fraction $\frac{a}{b}$ doit être divisée par un nombre entier c, on n'a qu'à multiplier le dénominateur par ce nombre, & laisser le numérateur tel qu'il est. C'est ainsi que $\frac{5}{8}$ divisé par 3 fait $\frac{5}{24}$, & que $\frac{9}{16}$ divisé par 5 fait $\frac{9}{80}$.

Ce calcul devient cependant plus facile quand le numérateur lui-même est divisible par le nombre entier, comme nous l'avons supposé à l'article 103. Par exemple $\frac{9}{16}$ divisé par 3 feroit, suivant notre derniere regle, $\frac{9}{48}$; mais par la premiere regle, qui est applicable ici, on a $\frac{3}{16}$, expression qui équivaut à $\frac{9}{48}$, mais qui est plus simple.

106.

On sera maintenant en état de comprendre comment il faut multiplier une fraction $\frac{a}{b}$ par une autre fraction $\frac{c}{d}$. On n'a qu'à considérer que $\frac{c}{d}$ signifie que c est divisé par d; & en partant de-là, on multipliera d'abord la fraction $\frac{a}{b}$ par c, ce qui produit le résultat $\frac{ac}{b}$; après quoi on divisera par d ce qui donne $\frac{ac}{bd}$. Nous tirons de-là la regle suivante, que pour multiplier deux fractions, on n'a besoin que de multiplier séparément les numérateurs & les dénominateurs. Ainsi

$\frac{1}{2}$ par $\frac{2}{3}$ donne le produit $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$;
$\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$ fait $\frac{8}{15}$; &
$\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{12}$ produit $\frac{15}{48}$ ou $\frac{5}{16}$, &c.

107.

Il nous reste à montrer comment on doit diviser une fraction par une autre. Il faut remarquer d'abord que si les deux fractions ont le même nombre pour dénominateur,

la diviſion n'a lieu qu'à l'égard des numérateurs ; car il eſt évident, par exemple, que $\frac{3}{12}$ ſont contenus autant de fois dans $\frac{9}{12}$, que 3 l'eſt dans 9, c'eſt-à-dire, 3 fois ; & pareillement pour diviſer $\frac{8}{12}$ par $\frac{9}{12}$, on n'a qu'à diviſer 8 par 9, ce qui donne $\frac{8}{9}$. On aura de même $\frac{6}{20}$ en $\frac{18}{20}$, 3 fois ; $\frac{7}{100}$ en $\frac{49}{100}$, 7 fois ; $\frac{7}{25}$ en $\frac{6}{25}$, $\frac{6}{7}$, &c.

108.

Mais quand les fractions n'ont pas leurs dénominateurs égaux, il faut avoir recours à la maniere dont nous avons dit qu'on les réduiſoit au même dénominateur. Qu'on ait, par exemple, la fraction $\frac{a}{b}$ à diviſer par la fraction $\frac{c}{d}$, on les réduira d'abord au même dénominateur, & l'on aura $\frac{ad}{bd}$ à diviſer par $\frac{bc}{bd}$; & il eſt clair à préſent que le quotient doit être indiqué ſimplement par la diviſion de ad par bc ; ce qui donne $\frac{ad}{bc}$.

Voici donc la regle : il faut multiplier le numérateur du dividende par le dénominateur du diviſeur, & le dénominateur du dividende par le numérateur du diviſeur ; le premier produit ſera le numérateur du quotient, & le ſecond produit ſera ſon dénominateur.

109.

Ainſi, en ſuivant cette regle pour diviſer $\frac{5}{8}$ par $\frac{2}{3}$, on aura le quotient $\frac{15}{16}$; la diviſion de $\frac{3}{4}$ par $\frac{1}{2}$ produira $\frac{6}{4}$ ou $\frac{3}{2}$, ou 1 & $\frac{1}{2}$; & celle de $\frac{25}{48}$ par $\frac{5}{6}$ donnera $\frac{150}{240}$ ou $\frac{5}{8}$.

110.

On a coutume auſſi de préſenter cette regle pour la diviſion d'une maniere plus facile à retenir, que voici : Si l'on renverſe la fraction par laquelle il s'agit de diviſer, de façon que le dénominateur ſe mette à la place du numérateur, & que celui-ci s'écrive ſous le trait, & qu'enſuite on multiplie la fraction, qui eſt le dividende, par cette fraction renverſée, le produit ſera le quotient cherché. Ainſi $\frac{3}{4}$ diviſé par $\frac{1}{2}$ eſt autant que $\frac{3}{4}$ multiplié par $\frac{2}{1}$, ce qui fait $\frac{6}{4}$ ou

$1\frac{1}{2}$. De même $\frac{5}{8}$ divisé par $\frac{2}{3}$ est autant que $\frac{5}{8}$ multiplié par $\frac{3}{2}$, ce qui produit $\frac{15}{16}$; ou $\frac{25}{48}$ divisé par $\frac{5}{6}$ fait autant que $\frac{25}{48}$ multiplié par $\frac{6}{5}$, dont le produit est $\frac{150}{240}$ ou $\frac{5}{8}$.

On voit donc en général que de diviser par la fraction $\frac{1}{2}$, c'est la même chose que de multiplier par $\frac{2}{1}$ ou 2; que la division par $\frac{1}{3}$ revient à la multiplication par $\frac{3}{1}$ ou par 3, &c.

III.

Le nombre 100 divisé par $\frac{1}{2}$ donnera donc 200; & 1000 divisé par $\frac{1}{3}$ fait 3000. De plus, s'il s'agit de diviser 1 par $\frac{1}{1000}$, le quotient est 1000; & en divisant 1 par $\frac{1}{100000}$, il vient 100000. Cela aide à comprendre qu'en divisant par 0, il doit en résulter un nombre infiniment grand; car la division de 1 par la petite fraction $\frac{1}{1000000000}$ produit déjà le nombre très-grand 1000000000.

112.

Tout nombre divisé par lui-même donnant l'unité, on sent bien qu'une fraction divisée par elle-même doit aussi donner le quotient 1; la même vérité suit de notre regle: car pour diviser $\frac{3}{4}$ par $\frac{3}{4}$, il faut multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{4}{3}$, & on obtient $\frac{12}{12}$ ou 1; & s'il s'agit de diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{a}{b}$, on multiplie $\frac{a}{b}$ par $\frac{b}{a}$; or le produit $\frac{ab}{ab}$ est égal à 1.

113.

Nous avons aussi à expliquer encore une expression dont l'usage est fréquent. On demande, par exemple, ce que c'est que la moitié de $\frac{3}{4}$; cela veut dire qu'on doit multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{1}{2}$. De même si l'on demande ce que sont les $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{8}$, on multipliera $\frac{5}{8}$ par $\frac{2}{3}$, ce qui produit $\frac{10}{24}$; & $\frac{3}{4}$ de $\frac{9}{16}$ font autant que $\frac{9}{16}$ multiplié par $\frac{3}{4}$, & font $\frac{27}{64}$.

114.

Enfin il faut observer ici à l'égard des signes + & —, les mêmes principes que

nous avons établis plus haut pour les nombres entiers. Ainsi $+\frac{1}{2}$ multiplié par $-\frac{1}{3}$, fait $-\frac{1}{6}$; & $-\frac{2}{3}$ multiplié par $-\frac{4}{5}$, donne $+\frac{8}{15}$. De plus $-\frac{5}{8}$ divisé par $+\frac{2}{3}$, fait $-\frac{15}{16}$; & $-\frac{3}{4}$ divisé par $-\frac{3}{4}$, fait $+\frac{12}{12}$ ou $+1$.

CHAPITRE XI.

Des Nombres quarrés.

115.

LE produit d'un nombre multiplié par le même nombre, se nomme un *quarré*; & par cette raison on appelle *racine quarrée* ce nombre considéré relativement à un tel produit.

Par exemple, quand on multiplie 12 par 12, le produit 144 est un quarré dont la racine est 12.

Le fondement de cette dénomination est pris dans la Géométrie, où l'on trouve le contenu d'un quarré en multipliant son côté par lui-même.

116.

Tous les nombres quarrés se trouvent donc par la multiplication; c'est-à-dire, en multipliant la racine par elle-même.

C'est ainsi que 1 est le quarré de 1, parce que 1 multiplié par 1 fait 1; & pareillement, que 4 est le quarré de 2; & 9 le quarré de 3; que 2 est la racine de 4, & 3 celle de 9.

Nous considérerons en premier lieu les quarrés des nombres naturels, & nous donnerons d'abord la petite table qui suit, dans laquelle plusieurs nombres ou racines se trouvent sur la premiere ligne, & leurs quarrés sur la seconde (*).

Nombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Quarrés	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169

(*) Nous avons des tables très-complettes pour les quarrés des nombres naturels, publiées sous le titre de *Tetragonometria Tabularia, &c. auctore J. JOBO LUDOLFO. Amstelodami*, 1690, *in*-4°. Ces tables vont depuis 1

117.

On remarquera d'abord sans peine dans ces nombres quarrés rangés ainsi par ordre, une belle propriété ; à savoir que, si l'on soustrait chacun de ces quarrés de celui qui suit immédiatement, les restes augmentent toujours de 2, & forment la suite que voici :

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, &c.
qui est celle des nombres impairs.

118.

Les quarrés des fractions se trouvent pareillement, en multipliant une fraction donnée par elle-même. Par exemple, le quarré de $\frac{1}{2}$ est $\frac{1}{4}$, &

$\frac{1}{3}$ a pour quarré $\frac{1}{9}$;
$\frac{2}{3}$ — — — — $\frac{4}{9}$;

jusqu'à 100000, non-seulement pour trouver ces quarrés, mais aussi les produits de deux nombres quelconques moindres que 100000 ; sans parler de différens autres usages qui sont détaillés dans l'Introduction qui est à la tête de l'Ouvrage.

$\frac{1}{4}$ a pour quarré $\frac{1}{16}$;
$\frac{3}{4}$ — — — — $\frac{9}{16}$, & ainsi de suite.

On voit assez qu'il suffit de diviser le quarré du numérateur par le quarré du dénominateur, & que la fraction qui exprime cette division, doit être le quarré de la fraction donnée. C'est ainsi encore que $\frac{25}{64}$ est le quarré de $\frac{5}{8}$; & réciproquement que $\frac{5}{8}$ est la racine de $\frac{25}{64}$.

119.

Quand on veut trouver le quarré d'un nombre mixte, ou composé d'un nombre entier & d'une fraction, on n'a qu'à le réduire à une seule fraction, & prendre ensuite le quarré de cette fraction. Qu'il s'agisse, par exemple, de trouver le quarré de $2\frac{1}{2}$; on exprimera d'abord ce nombre par $\frac{5}{2}$, & prenant le quarré de cette fraction, on a $\frac{25}{4}$ ou $6\frac{1}{4}$ pour la valeur du quarré de $2\frac{1}{2}$. De même pour prendre le quarré de $3\frac{1}{4}$, on dira $3\frac{1}{4}$ est autant que $\frac{13}{4}$; donc son quarré est égal à $\frac{169}{16}$, ou à 10 & $\frac{9}{16}$. Voici

pour chaque quart d'augmentation les quarrés des nombres compris entre 3 & 4.

Nombres	3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
Quarrés	9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{16}$	16

On peut conclure de cette petite table, que ſi une racine contient une fraction, ſon quarré ne manque pas d'en contenir une auſſi. Soit, par exemple, la racine $1\frac{5}{12}$; ſon quarré eſt $\frac{289}{144}$, ou $2\frac{1}{144}$; c'eſt-à-dire un peu plus grand que le nombre entier 2.

120.

Paſſons aux expreſſions générales. Quand la racine eſt a, le quarré doit être aa; ſi la racine eſt $2a$, le quarré eſt $4aa$; ce qui donne à connoître qu'en doublant la racine, le quarré devient 4 fois plus grand. De même, ſi la racine eſt $3a$, le quarré eſt $9aa$; & ſi la racine eſt $4a$, le quarré eſt $16aa$. Mais ſi la racine eſt ab, le quarré eſt $aabb$; & ſi la racine eſt abc, le quarré eſt $aabbcc$.

121.

Ainſi, quand la racine eſt compoſée de deux ou de pluſieurs facteurs, il faut multiplier enſemble leurs quarrés; & réciproquement, ſi un quarré eſt compoſé de deux ou de pluſieurs facteurs, dont chacun eſt un quarré, on n'a qu'à multiplier enſemble les racines de ces quarrés, pour avoir la racine complette du quarré propoſé. Ainſi, comme 2304 eſt autant que 4.16.36, la racine quarrée en eſt 2.4.6 ou 48; & en effet 48 ſe trouve être la racine quarrée de 2304, parce que 48.48 fait 2304.

122.

Voyons auſſi ce qu'il faut obſerver dans cette matiere à l'égard des ſignes + & —. Et d'abord il eſt clair que ſi la racine a le ſigne +, c'eſt-à-dire qu'elle eſt un nombre poſitif, ſon quarré doit néceſſairement être de même un nombre poſitif, parce que + par + fait +: le quarré de $+a$

fera $+aa$. Mais si la racine est un nombre négatif, comme $-a$, le quarré n'en devient pas moins positif, puisqu'il est $+aa$; nous pouvons donc conclure que $+aa$ est le quarré tant de $+a$ que de $-a$, & que par conséquent on peut indiquer pour tout quarré deux racines, l'une positive & l'autre négative. La racine quarrée de 25, par exemple, est également $+5$ & -5, parce que -5 multiplié par -5 donne 25 aussi bien que $+5$ par $+5$.

CHAPITRE XII.

Des Racines quarrées & des Nombres irrationnels qui en résultent.

123.

Ce que nous avons dit dans le chapitre précédent revient principalement à ceci: Que la racine quarrée d'un nombre proposé n'est autre chose qu'un nombre tel

que son quarré soit égal au nombre proposé, & qu'on peut mettre devant ces racines tant le signe positif que le signe négatif.

124.

Ainsi quand un nombre proposé est un quarré, & qu'on a retenu dans la mémoire un nombre suffisant de nombres quarrés, il est facile de trouver la racine de celui qui est donné. Si c'est 196, par exemple, qui soit ce nombre proposé, on sait que sa racine quarrée est 14.

On traite de même avec facilité les fractions: il est clair, par exemple, que $\frac{5}{7}$ est la racine quarrée de $\frac{25}{49}$; on n'a, pour s'en convaincre, qu'à prendre la racine quarrée du numérateur, & celle du dénominateur.

Si le nombre proposé est un nombre mixte, comme $12\frac{1}{4}$, on le réduira à une seule fraction, laquelle est ici $\frac{49}{4}$, & on verra sur le champ que c'est $\frac{7}{2}$ ou $3\frac{1}{2}$, qui doit être la racine quarrée de $12\frac{1}{4}$.

125.

Mais quand le nombre propoſé n'eſt pas un quarré, comme 12 par exemple, il n'eſt pas poſſible non plus d'en extraire la racine quarrée, ou d'indiquer un nombre tel que, multiplié par lui-même, il donne le produit 12. Ce que nous ſavons cependant, c'eſt que la racine quarrée de 12 doit être plus grande que 3, parce que 3.3 ne font que 9; & plus petite que 4, parce que 4.4 font 16, c'eſt-à-dire plus de 12. Nous ſavons même auſſi que cette racine eſt plus petite que $3\frac{1}{2}$; car nous avons vu que le quarré de $3\frac{1}{2}$ ou $\frac{7}{2}$ eſt $12\frac{1}{4}$. Enfin nous pouvons déterminer cette racine d'une maniere encore plus approchée, en la comparant avec $3\frac{7}{15}$; car le quarré de $3\frac{7}{15}$ ou de $\frac{52}{15}$ eſt $\frac{2704}{225}$ ou 12 & $\frac{4}{225}$, par conſéquent cette fraction eſt encore un peu plus grande que la racine qu'on demande; mais de très-peu, puiſque les deux quarrés ne different entr'eux que de $\frac{4}{225}$.

126.

On pourroit ſoupçonner que puiſque $3\frac{1}{2}$ & $3\frac{7}{15}$ ſont des nombres plus grands que la racine de 12, il ſeroit poſſible d'ajouter à 3 une fraction un peu plus petite que $\frac{1}{15}$, & préciſément telle que le quarré de la ſomme fût égal à 12.

Eſſayons donc avec $3\frac{3}{7}$, puiſque $\frac{3}{7}$ eſt un peu moindre que $\frac{7}{15}$. Or $3\frac{3}{7}$ eſt autant que $\frac{24}{7}$, dont le quarré eſt $\frac{576}{49}$, & par conſéquent plus petit de $\frac{12}{49}$ que le quarré de 12, qu'on peut exprimer par $\frac{588}{49}$. Il eſt donc prouvé que $3\frac{3}{7}$ eſt plus petit, & que $3\frac{7}{15}$ eſt plus grand que la racine cherchée. Eſſayons donc un nombre un peu plus grand que $3\frac{3}{7}$, mais pourtant plus petit que $3\frac{7}{15}$, par exemp. $3\frac{5}{11}$. Ce nombre qui vaut $\frac{38}{11}$, a pour quarré $\frac{1444}{121}$. Or en réduiſant 12 à ce dénominateur on trouve $\frac{1452}{121}$; il s'enſuit donc que $3\frac{5}{11}$ eſt encore plus petit que la racine de 12, à ſavoir de $\frac{8}{121}$. Subſtituons donc à $\frac{5}{11}$ la fraction $\frac{6}{13}$, qui eſt un peu plus grande,

& voyons encore ce qui résulte de la comparaison du quarré de $3\frac{6}{13}$ avec le nombre 12 proposé: le quarré de $3\frac{6}{13}$ est $\frac{2025}{169}$, or 12 réduit à la même dénomination fait $\frac{2028}{169}$; ainsi $3\frac{6}{13}$ est encore trop petit, quoique seulement de $\frac{3}{169}$, tandis que $3\frac{7}{15}$ s'est trouvé trop grand.

127.

On peut comprendre facilement que quelque fraction que l'on joigne à 3, le quarré de cette somme doit toujours contenir une fraction, & ne peut jamais devenir exactement égal au nombre entier 12. Ainsi, quoique nous sachions que la racine quarrée de 12 est plus grande que $3\frac{6}{13}$ & moindre que $3\frac{7}{15}$, nous sommes cependant forcés de convenir que nous ne sommes pas en état d'assigner une fraction intermédiaire entre ces deux-là, & telle en même temps qu'ajoutée à 3, elle exprime exactement la racine quarrée de 12. Avec tout cela cependant on ne peut pas dire que la

racine quarrée de 12 soit indéterminée par elle-même & absolument; il suit seulement de ce que nous avons rapporté, que cette racine, quoiqu'elle ait nécessairement une grandeur déterminée, ne sauroit être exprimée par des fractions.

128.

Il est donc une espece de nombres qui ne sont aucunement assignables par des fractions, & qui sont cependant des quantités déterminées; la racine quarrée de 12 nous en a offert un exemple. On nomme cette nouvelle espece de nombres, *des nombres irrationnels;* ils se présentent toutes les fois qu'on cherche la racine quarrée d'un nombre qui n'est pas un quarré. C'est ainsi que 2 n'étant pas un quarré parfait, la racine quarrée de 2, ou le nombre qui, multiplié par lui-même, produit 2, est une quantité irrationnelle. On nomme aussi ces nombres des *quantités sourdes* ou *des incommensurables*.

129.

Ces quantités irrationnelles, quoiqu'elles ne puissent pas s'exprimer par des fractions, sont cependant des grandeurs dont on peut se faire une idée juste. Car quelque cachée que nous paroisse, par exemple, la racine de 12, nous n'ignorons pas cependant que c'est un nombre qui, multiplié par lui-même, produit exactement 12; & cette propriété est suffisante pour nous donner une idée de ce nombre, d'autant qu'il dépend de nous d'approcher de plus en plus de sa valeur.

130.

Comme on est donc suffisamment au fait de la signification des nombres irrationnels dont il est question, on est convenu d'un certain signe, pour indiquer les racines quarrées des nombres qui ne sont pas des quarrés parfaits. Ce signe a cette figure $\sqrt{}$, & se prononce en effet *racine quarrée*. Ainsi $\sqrt{12}$ signifie la racine quarrée de 12, ou le

le nombre qui, multiplié par lui-même, fait 12. De même, $\sqrt{2}$ indique la racine quarrée de 2; $\sqrt{3}$, celle de 3; $\sqrt{\frac{2}{3}}$, la racine quarrée de $\frac{2}{3}$; & en général $\sqrt{a}$ indique la racine quarrée du nombre a. Toutes les fois donc qu'on voudra indiquer la racine quarrée d'un nombre qui n'est pas un quarré, on n'aura qu'à se servir de la marque $\sqrt{}$ en la mettant devant ce nombre.

131.

L'explication que nous avons donnée des nombres irrationnels, nous met aussitôt sur la voie pour appliquer à ces nombres les calculs usités. Car sachant, par exemple, que la racine quarrée de 2, multipliée par elle-même, doit produire 2; nous savons aussi que la multiplication de $\sqrt{2}$ par $\sqrt{2}$ doit produire nécessairement 2; que de même celle de $\sqrt{3}$ par $\sqrt{3}$ doit donner 3; que $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$ fait 5; que $\sqrt{\frac{2}{3}}$ par $\sqrt{\frac{2}{3}}$ fait $\frac{2}{3}$; & que généralement $\sqrt{a}$ multiplié par $\sqrt{a}$ produit a.

132.

Mais quand il s'agit de multiplier $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$, le produit eſt $\sqrt{ab}$; parce que nous avons montré plus haut que ſi un quarré a des facteurs, ſa racine doit être composée des racines de ces facteurs. C'eſt pourquoi l'on trouve la racine quarrée du produit ab, laquelle eſt $\sqrt{ab}$, en multipliant la racine quarrée de a ou $\sqrt{a}$, par la racine quarrée de b, ou par $\sqrt{b}$. Il eſt clair par-là que ſi b étoit égal à a, on auroit $\sqrt{aa}$ pour le produit de $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$. Or $\sqrt{aa}$ eſt évidemment a, parce que aa eſt le quarré de a.

133.

S'il s'agit de la diviſion, & qu'on ait $\sqrt{a}$, par exemple, à diviſer par $\sqrt{b}$, on obtient $\sqrt{\frac{a}{b}}$; & il peut arriver ici que dans le quotient l'irrationalité s'évanouiſſe. C'eſt ainſi qu'ayant à diviſer $\sqrt{18}$ par $\sqrt{8}$, on obtient le quotient $\sqrt{\frac{18}{8}}$, lequel ſe réduit à $\sqrt{\frac{9}{4}}$, & par conſéquent à $\sqrt{\frac{3}{2}}$, parce que $\frac{9}{4}$ eſt le quarré de $\frac{3}{2}$.

134.

Quand le nombre devant lequel on a mis le ſigne radical $\sqrt{\ }$, eſt lui-même un quarré, on en exprime la racine de la maniere accoutumée. Ainſi $\sqrt{4}$ eſt autant que 2, $\sqrt{9}$ autant que 3, $\sqrt{36}$ autant que 6, & $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ autant que $\frac{7}{2}$ ou $3\frac{1}{2}$. On voit que dans ces cas l'irrationalité n'eſt qu'apparente, & qu'elle diſparoît d'elle-même.

135.

Il eſt facile auſſi de multiplier nos nombres irrationnels par les nombres ordinaires. Par exemple, 2 multiplié par $\sqrt{5}$ fait $2\sqrt{5}$, & 3 fois $\sqrt{2}$ fait $3\sqrt{2}$. Dans ce ſecond exemple cependant, comme 3 eſt autant que $\sqrt{9}$, on peut exprimer auſſi 3 fois $\sqrt{2}$ par $\sqrt{9}$ multipliant $\sqrt{2}$, ou par $\sqrt{18}$. De même $2\sqrt{a}$ eſt autant que $\sqrt{4a}$, & $3\sqrt{a}$ autant que $\sqrt{9a}$. Et en général

$b\sqrt{a}$ a la même valeur que la racine quarrée de bba ou $\sqrt{abb}$; d'où l'on infere réciproquement, que quand le nombre qui eſt précédé du ſigne radical contient un quarré, on peut prendre la racine de ce quarré & la mettre devant le ſigne, comme on feroit en écrivant $b\sqrt{a}$ au lieu de $\sqrt{bba}$. On comprendra aiſément d'après cela les réductions qui ſuivent :

$\sqrt{8}$ ou $\sqrt{2.4}$ eſt autant que $2\sqrt{2}$;
$\sqrt{12}$ ou $\sqrt{3.4}$ — — — $2\sqrt{3}$;
$\sqrt{18}$ ou $\sqrt{2.9}$ — — — $3\sqrt{2}$;
$\sqrt{24}$ ou $\sqrt{6.4}$ — — — $2\sqrt{6}$;
$\sqrt{32}$ ou $\sqrt{2.16}$ — — — $4\sqrt{2}$;
$\sqrt{75}$ ou $\sqrt{3.25}$ — — — $5\sqrt{3}$;
& ainſi de ſuite.

136.

La diviſion eſt fondée ſur les mêmes principes. $\sqrt{a}$ diviſé par $\sqrt{b}$, fait $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ou $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Et pareillement

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ eſt autant que $\sqrt{\frac{8}{2}}$ ou $\sqrt{4}$ ou 2;
$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ — — — — $\sqrt{\frac{18}{2}}$ ou $\sqrt{9}$ ou 3;
$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ — — — — $\sqrt{\frac{12}{3}}$ ou $\sqrt{4}$ ou 2.

De plus

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ eſt autant que $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$ ou $\sqrt{\frac{4}{2}}$ ou $\sqrt{2}$;
$\frac{3}{\sqrt{3}}$ — — — — $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$ ou $\sqrt{\frac{9}{3}}$ ou $\sqrt{3}$;
$\frac{12}{\sqrt{6}}$ — — — — $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{6}}$ ou $\sqrt{\frac{144}{6}}$, ou $\sqrt{24}$ ou $\sqrt{6.4}$, ou enfin $2\sqrt{6}$.

137.

Il n'y a rien à remarquer de particulier à l'égard de l'addition & de la ſouſtraction, parce qu'on ne fait que lier les nombres par les ſignes $+$ & $-$. Par exemple, $\sqrt{2}$ ajouté à $\sqrt{3}$ s'écrit $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; & $\sqrt{3}$ ſouſtrait de $\sqrt{5}$ s'écrit $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

138.

Enfin nous ferons obſerver que par oppoſition à ces nombres irrationnels, on nomme les autres nombres, tant entiers que fractionnaires, des *nombres rationnels*.

Ainſi toutes les fois qu'on parle de nombres rationnels, on entend par-là des nombres entiers, ou bien auſſi des fractions.

CHAPITRE XIII.

Des Quantités impossibles ou imaginaires, qui dérivent de la même source.

139.

Nous avons déjà vu plus haut que les quarrés des nombres, tant positifs que négatifs, sont toujours positifs ou affectés du signe +; ayant fait observer que — *a* multiplié par — *a* fait + *aa*, tout comme le produit de + *a* par + *a*. C'est pourquoi, dans le chapitre précédent, nous avons supposé que tous les nombres dont il s'agissoit d'extraire les racines quarrées, étoient positifs.

140.

Quand il arrive donc qu'il soit question d'extraire la racine d'un nombre négatif, on ne peut que se trouver fort embarrassé, n'y ayant aucun nombre assignable dont le

quarré soit un nombre négatif. Car supposez, par exemple, qu'on voulût extraire la racine de — 4, ce seroit demander un nombre tel que, multiplié par lui-même, il donnât — 4; or ce nombre cherché n'est ni + 2 ni — 2, parce que le quarré, tant de + 2 que de — 2, est + 4 & non pas — 4.

141.

Il faut donc conclure que la racine quarrée d'un nombre négatif ne peut être ni un nombre positif, ni un nombre négatif, puisqu'aussi les quarrés des nombres négatifs prennent le signe *plus*. Par conséquent il faut que la racine en question appartienne à une espece tout-à-fait particuliere de nombres; puisqu'elle ne peut être comptée ni parmi les nombres positifs, ni parmi les nombres négatifs.

142.

Or nous avons remarqué plus haut que les nombres positifs sont tous plus grands

que rien ou o, & que les nombres négatifs ſont tous plus petits que rien ou o ; de façon que tout ce qui ſurpaſſe o s'exprime par des nombres poſitifs, & que tout ce qui eſt moindre que o, s'exprime par des nombres négatifs. Nous voyons donc que les racines quarrées de nombres négatifs ne ſont ni plus grandes ni plus petites que rien. Cependant on ne peut pas dire qu'elles ſoient o ; car o multiplié par o fait o, & par conſéquent ne donne pas un nombre négatif.

143.

Or puiſque tous les nombres qu'il eſt poſſible de s'imaginer, ſont ou plus grands ou plus petits que o, ou ſont o même, il eſt clair qu'on ne peut pas même compter la racine quarrée d'un nombre négatif parmi les nombres poſſibles, & il faut donc dire que c'eſt une quantité impoſſible. C'eſt de cette façon que nous ſommes conduits à l'idée de nombres qui par leur nature ſont

impoſſibles. On nomme ordinairement ces nombres des *quantités imaginaires*, parce qu'elles exiſtent purement dans l'imagination.

144.

Toutes les expreſſions, comme $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, &c. ſont par conſéquent des nombres impoſſibles ou imaginaires, puiſqu'ils indiquent des racines de quantités négatives. Et c'eſt de pareils nombres qu'on ſoutient avec raiſon qu'ils ne ſont ni rien, ni plus que rien, ni moins que rien ; ce qui fait principalement qu'on eſt obligé de les déclarer impoſſibles.

145.

Avec tout cela cependant ces nombres ſe préſentent à l'eſprit, ils ont lieu dans notre imagination, & nous ne laiſſons pas d'en avoir une idée ſuffiſante ; puiſque nous ſavons que par $\sqrt{-4}$, par exemple, on entend un nombre qui, multiplié par lui-même, fait -4. C'eſt auſſi pourquoi rien

ne nous empêche d'appliquer le calcul à ces nombres imaginaires, & de les employer.

146.

Notre premiere notion dans la matiere que nous traitons, eſt que le quarré de $\sqrt{-3}$, par exemple, ou le produit de $\sqrt{-3}$ par $\sqrt{-3}$, eſt -3; que celui de $\sqrt{-1}$ par $\sqrt{-1}$, fait -1; & en général, qu'en multipliant $\sqrt{-a}$ par $\sqrt{-a}$, ou en prenant le quarré de $\sqrt{-a}$, on obtient $-a$.

147.

Maintenant, comme $-a$ ſignifie autant que $+a$ multiplié par -1, & que la racine quarrée d'un produit ſe trouve en multipliant enſemble les racines des facteurs, il s'enſuit que la racine de a multipliée par -1, ou $\sqrt{-a}$, eſt autant que $\sqrt{a}$ multipliée par $\sqrt{-1}$. Or $\sqrt{a}$ eſt un nombre poſſible ou réel, par conſéquent ce qu'il y a d'impoſſible dans une quantité imaginaire, peut toujours ſe réduire à $\sqrt{-1}$. Par cette raiſon donc, $\sqrt{-4}$ eſt autant que $\sqrt{4}$ multipliée par $\sqrt{-1}$, & autant que $2\sqrt{-1}$, à cauſe de $\sqrt{4}$ égal à 2. Par la même raiſon $\sqrt{-9}$ ſe réduit à $\sqrt{9}.\sqrt{-1}$, ou à $3\sqrt{-1}$; & $\sqrt{-16}$ ſignifie $4\sqrt{-1}$.

148.

De plus, comme $\sqrt{a}$ multipliée par $\sqrt{b}$ fait $\sqrt{ab}$, l'on aura $\sqrt{6}$ pour la valeur de $\sqrt{-2}$ multipliée par $\sqrt{-3}$; & $\sqrt{4}$ ou 2, pour la valeur du produit de $\sqrt{-1}$ par $\sqrt{-4}$. On voit donc que deux nombres imaginaires, multipliés l'un par l'autre, en produiſent un réel ou poſſible.

Mais au contraire un nombre poſſible, multiplié par un nombre impoſſible, donne toujours de l'imaginaire: $\sqrt{-3}$ par $\sqrt{+5}$ fait $\sqrt{-15}$.

149.

Il en eſt de même à l'égard de la diviſion; car $\sqrt{a}$ diviſé par $\sqrt{b}$ faiſant $\sqrt{\frac{a}{b}}$,

il eſt clair que $\sqrt{-4}$ diviſé par $\sqrt{-1}$ fera $\sqrt{+4}$ ou 2; que $\sqrt{+3}$ diviſé par $\sqrt{-3}$ fera $\sqrt{-1}$; & que 1 diviſé par $\sqrt{-1}$ me donne $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$ ou $\sqrt{-1}$; parce que 1 eſt autant que $\sqrt{+1}$.

150.

Nous avons obſervé plus haut que la racine quarrée d'un nombre quelconque a toujours deux valeurs, l'une poſitive & l'autre négative; que $\sqrt{4}$, par exemple, eſt également $+2$ & -2, & qu'en général on peut adopter $-\sqrt{a}$ comme $+\sqrt{a}$ pour la racine quarrée de a. Cette remarque a lieu auſſi, quand il s'agit de nombres imaginaires: la racine quarrée de $-a$ eſt également $+\sqrt{-a}$ & $-\sqrt{-a}$; mais il faut ſe garder de confondre les ſignes $+$ & $-$ qui ſont devant le ſigne radical $\sqrt{}$, & le ſigne qui ne vient qu'après cette marque $\sqrt{}$.

151.

Il nous reſte enfin à lever le doute qu'on pourroit avoir ſur l'utilité des nombres dont nous venons de parler; car en effet ces nombres étant impoſſibles, il ne ſeroit pas étonnant qu'on les crût tout-à-fait inutiles & l'objet ſeulement d'une vaine ſpéculation. On ſe tromperoit cependant; le calcul des imaginaires eſt de la plus grande importance; ſouvent il ſe préſente des queſtions, deſquelles on ne ſauroit dire ſur le champ ſi elles renferment quelque choſe de réel & de poſſible ou non. Or quand la ſolution d'une pareille queſtion nous conduit à des nombres imaginaires, nous ſommes certains que ce qu'on demande eſt impoſſible.

Afin d'éclaircir ce que nous venons de dire par un exemple, ſuppoſons qu'on propoſe la queſtion: de diviſer le nombre 12 en deux parties, telles que le produit de ces parties faſſe 40. Si l'on réſout cette

question par les regles ordinaires, on trouve pour les parties cherchées $6+\sqrt{-4}$ & $6-\sqrt{-4}$; mais ces nombres sont imaginaires: on conclut donc par cela même qu'il est impossible de résoudre la question.

On saisira facilement la différence, en supposant que la question eût été de diviser 12 en deux parties qui, multipliées ensemble, fissent 35; car il est évident que ces parties seroient 7 & 5.

CHAPITRE XIV.

Des Nombres Cubiques.

152.

QUAND un nombre a été multiplié trois fois par lui-même, ou, ce qui revient au même, que le quarré d'un nombre a été multiplié encore une fois par ce nombre, on a un produit qui se nomme un *cube* ou un *nombre cubique*. C'est ainsi

que le cube de a est aaa, vu que c'est ce qu'on obtient en multipliant a par soi-même, ou par a, & ensuite ce quarré aa encore par a.

On voit par-là que les cubes des nombres naturels doivent se suivre dans l'ordre que voici (*):

Nombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubes	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

153.

Si nous considérons les différences de ces nombres cubiques, comme nous l'avons fait pour les quarrés, en soustrayant chaque cube de celui qui le suit, nous obtenons la suite de nombres que voici:

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271;

nous ne remarquons d'abord aucune régu-

(*) On doit à un Mathématicien, nommé *J. Paul Buchner*, des tables publiées à Nuremberg en 1701, dans lesquelles on trouve tant les quarrés que les cubes de tous les nombres depuis 1 jusqu'à 12000.

larité dans cette ſuite ; mais ſi nous prenons les différences de ces nombres, nous voyons ſe former la ſérie ſuivante :

12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54;

dans laquelle les termes augmentent toujours évidemment de 6.

154.

Après la définition que nous avons donnée du cube, il ne ſera pas difficile de trouver les cubes des nombres fractionnaires : on verra que $\frac{1}{8}$ eſt le cube de $\frac{1}{2}$; que $\frac{1}{27}$ eſt le cube de $\frac{1}{3}$, & que $\frac{8}{27}$ eſt celui de $\frac{2}{3}$. En effet on n'a qu'à prendre ſéparément le cube du numérateur & celui du dénominateur, on aura $\frac{27}{64}$ pour le cube de la fraction $\frac{3}{4}$.

155.

Si c'eſt d'un nombre mixte qu'il s'agit de trouver le cube, il faut d'abord le réduire en une ſeule fraction, & procéder enſuite comme il a été dit. Pour trouver, par exemple, le cube de $1\frac{1}{2}$, il faut prendre celui

celui de $\frac{3}{2}$, qui eſt $\frac{27}{8}$, ou 3 & $\frac{3}{8}$. De même le cube de $1\frac{1}{4}$, ou de la fraction ſeule $\frac{5}{4}$, eſt $\frac{125}{64}$ ou 1 & $\frac{61}{64}$, & le cube de $3\frac{1}{4}$ ou de $\frac{13}{4}$ eſt $\frac{2197}{64}$, ou $34\frac{21}{64}$.

156.

Puiſque aaa eſt le cube de a, celui du nombre ab ſera $aaabbb$; d'où l'on voit que ſi un nombre a deux ou pluſieurs facteurs, on peut trouver ſon cube en multipliant enſemble les cubes de ces facteurs. Par exemple, comme 12 eſt autant que 3.4, on multiplie le cube de 3, qui eſt 27, par le cube de 4 qui eſt 64, & on obtient 1728, cube de 12. On voit de plus que le cube de $2a$ eſt $8aaa$, & par conſéquent 8 fois plus grand que le cube de a ; & de même, que le cube de $3a$ eſt $27aaa$, c'eſt-à-dire qu'il eſt 27 fois plus grand que le cube de a.

157.

Faiſons attention auſſi aux ſignes + & —. Il eſt clair d'abord que le cube d'un

nombre positif $+a$ ne peut qu'être positif de même, c'est-à-dire $+aaa$. Mais s'il s'agit de prendre le cube d'un nombre négatif $-a$, on verra qu'en prenant d'abord le quarré, lequel est $+aa$, & multipliant ensuite, selon la regle, ce quarré par $-a$, le cube cherché devient $-aaa$. Il n'en est donc pas, à cet égard, des nombres cubiques comme des nombres quarrés, puisque ceux-ci se trouvent toujours positifs. Le cube de -1 est -1, celui de -2 est -8, celui de -3 est -27, & ainsi de suite.

CHAPITRE XV.

Des Racines cubiques & des Nombres irrationnels qui en dérivent.

158.

De même qu'on peut, comme on a vu, trouver le cube d'un nombre donné, on peut réciproquement aussi, étant donné un

nombre quelconque, trouver le nombre qui, multiplié trois fois par lui-même, produit le nombre proposé. Ce nombre cherché s'appelle relativement à l'autre, *la racine cubique*. Ainsi la racine cubique d'un nombre donné est le nombre dont le cube est égal à ce nombre donné.

159.

Il est donc facile de déterminer la racine cubique, quand le nombre proposé est réellement un cube, comme nous en avons vu des exemples dans le chapitre précédent. On sent bien que la racine cubique de 1 est 1; que celle de 8 est 2; que celle de 27 est 3; que celle de 64 est 4, & ainsi de suite. Et pareillement, que la racine cubique de -27 est -3; & que celle de -125 est -5.

De plus, que si le nombre proposé est rompu, comme $\frac{8}{27}$, la racine cubique en doit être $\frac{2}{3}$; & que celle de $\frac{64}{343}$ est $\frac{4}{7}$. Enfin, que la racine cubique d'un nombre mixte

$2\frac{10}{27}$ doit être $\frac{4}{3}$ ou $1\frac{1}{3}$; parce que $2\frac{10}{27}$ eſt autant que $\frac{64}{27}$.

160.

Mais ſi le nombre propoſé n'eſt pas réellement un cube, ſa racine cubique ne pourra pas non plus s'exprimer ni en nombres entiers, ni en nombres fractionnaires. Par exemple, 43 n'eſt pas un nombre cubique ; je dis donc qu'il eſt impoſſible d'aſſigner un nombre, ſoit entier ſoit fractionnaire, dont le cube faſſe exactement 43. Ce qu'on peut aſſurer cependant, c'eſt que la racine cubique de ce nombre eſt plus grande que 3, vu que le cube de 3 ne fait que 27, & que cette racine eſt plus petite que 4, parce que le cube de 4 eſt 64. Nous ſavons donc que la racine cubique cherchée eſt néceſſairement contenue entre les nombres 3 & 4.

161.

Si l'on veut donc, puiſque la racine cubique de 43 ſurpaſſe 3, ajouter à 3 une

fraction ; il eſt ſûr qu'on pourra de plus en plus approcher de la vraie valeur de cette racine ; mais on ne pourra cependant jamais indiquer de nombre qui exprime exactement cette valeur ; parce que le cube d'un nombre mixte ne peut jamais être parfaitement égal à un nombre entier, tel qu'eſt 43. Si l'on ſuppoſoit, par exemple, que $3\frac{1}{2}$ ou $\frac{7}{2}$ fût la racine cubique cherchée de 43, on ſe tromperoit de $\frac{1}{8}$; car le cube de $\frac{7}{2}$ ne fait que $\frac{343}{8}$ ou $42\frac{7}{8}$.

162.

Il eſt donc clair par-là que la racine cubique de 43 ne peut en aucune maniere s'exprimer ſoit par des nombres entiers, ſoit par des fractions. Cependant on a une idée diſtincte de la grandeur de cette racine ; cela engage à ſe ſervir, pour l'indiquer, du ſigne $\sqrt[3]{}$, qu'on met devant le nombre propoſé, & qu'on prononce *racine cubique*, afin de la diſtinguer de la racine quarrée, laquelle on ne fait ſouvent que

nommer simplement racine. Ainsi $\sqrt[3]{43}$ signifie la racine cubique de 43, c'est-à-dire, le nombre dont le cube est 43, ou qui, multiplié trois fois par lui-même, fait 43.

163.

Il est donc clair aussi que de telles expressions ne peuvent appartenir aux quantités rationnelles, & qu'elles constituent plutôt une espece particuliere de quantités irrationnelles. Elles n'ont même rien de commun avec les racines quarrées, & il n'est pas possible d'exprimer une telle racine cubique par une racine quarrée, comme par exemple par $\sqrt{12}$; car le quarré de $\sqrt{12}$ étant 12, son cube sera $12\sqrt{12}$, par conséquent encore irrationnel & tel qu'il ne peut être égal à 43.

164.

Que si le nombre proposé est un cube réel, nos expressions deviennent rationnelles: $\sqrt[3]{1}$ est autant que 1; $\sqrt[3]{8}$ est autant

que 2; $\sqrt[3]{27}$ autant que 3; & en général $\sqrt[3]{aaa}$ autant que a.

165.

S'il étoit question de multiplier une racine cubique comme $\sqrt[3]{a}$ par une autre comme $\sqrt[3]{b}$, le produit doit être $\sqrt[3]{ab}$; car nous savons que la racine cubique d'un produit ab se trouve en multipliant ensemble les racines cubiques des facteurs. On voit par cela même que s'il s'agissoit de la division de $\sqrt[3]{a}$ par $\sqrt[3]{b}$, le quotient seroit $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

166.

On comprend aussi que $2\sqrt[3]{a}$ est autant que $\sqrt[3]{8a}$, parce que 2 équivaut à $\sqrt[3]{8}$; que $3\sqrt[3]{a}$ est autant que $\sqrt[3]{27a}$, & $b\sqrt[3]{a}$ autant que $\sqrt[3]{abbb}$. Ainsi réciproquement, si le nombre qui suit le signe radical a un facteur qui soit un cube, on peut le faire

diſparoître en en mettant la racine cubique devant le ſigne. Par exemple, au lieu de $\sqrt[3]{64a}$ on peut écrire $4\sqrt[3]{a}$; & $5\sqrt[3]{a}$ au lieu de $\sqrt[3]{125a}$. Il ſuit de-là que $\sqrt[3]{16}$ eſt autant que $2\sqrt[3]{2}$, parce que 16 eſt autant que 8.2.

167.

Quand un nombre propoſé eſt négatif, ſa racine cubique n'eſt pas ſujette aux difficultés que nous avons rencontrées en traitant des racines quarrées. Car puiſque les cubes de nombres négatifs ſont négatifs, de même il s'enſuit qu'auſſi les racines cubiques de nombres négatifs ſont ſimplement négatives. Ainſi $\sqrt[3]{-8}$ ſignifie -2, & $\sqrt[3]{-27}$, eſt autant que -3. Il s'enſuit auſſi que $\sqrt[3]{-12}$ eſt la même choſe que $-\sqrt[3]{12}$, & que $\sqrt[3]{-a}$ peut s'exprimer par $-\sqrt[3]{a}$. D'où l'on voit que le ſigne $-$, s'il ſe trouve derriere le ſigne de la racine cubique, auroit auſſi pu ſe mettre devant ce ſigne. Nous ne ſommes donc pas conduits ici à des nombres impoſſibles ou imaginaires, comme cela nous eſt arrivé en conſidérant les racines quarrées des nombres négatifs.

CHAPITRE XVI.

Des Puiſſances en général.

168.

LE produit qu'on obtient en multipliant un nombre pluſieurs fois par lui-même, ſe nomme *une puiſſance*. Ainſi un quarré qui provient de la multiplication d'un nombre par lui-même, & un cube qu'on obtient en multipliant un nombre trois fois par lui-même, ſont des puiſſances. On dit auſſi dans le premier cas, que le nombre eſt élevé au ſecond degré, ou à la ſeconde puiſſance; & dans l'autre cas, que le nombre eſt élevé au troiſieme degré ou à la troiſieme puiſſance.

169.

C'eſt qu'on diſtingue ces puiſſances l'une de l'autre par le nombre de fois que le nombre propoſé a été multiplié par lui-même. Par exemple, un quarré ſe nomme la ſeconde puiſſance, parce qu'un certain nombre donné a été multiplié deux fois par lui-même; ſi un nombre a été multiplié trois fois par lui-même, on nomme le produit la troiſieme puiſſance, laquelle ſignifie donc la même choſe qu'un cube. Multipliez un nombre quatre fois par lui-même, vous aurez ſa quatrieme puiſſance, ou bien ce qu'on nomme communément *le quarré-quarré* ou *le bi-quarré :* & il n'eſt pas difficile à préſent de comprendre ce qu'on entend par la cinquieme, ſixieme, ſeptieme, &c. puiſſance d'un nombre. J'ajoute ſeulement que ces puiſſances ceſſent après le quatrieme degré d'avoir d'autres noms particuliers.

170.

Pour éclaircir tout cela encore mieux, nous remarquerons d'abord que les puiſſances de 1 reſtent conſtamment les mêmes; parce que, quelque nombre de fois qu'on multiplie ce nombre 1 par lui-même, le produit ſe trouve toujours être 1. Nous commencerons donc ici par indiquer les puiſſances de 2 & de 3. Voici l'ordre qu'elles ſuivent :

Puiſſances	*du Nombre 2,*	*du Nombre 3.*
I.	2	3
II.	4	9
III.	8	27
IV.	16	81
V.	32	243
VI.	64	729
VII.	128	2187
VIII.	256	6561
IX.	512	19683
X.	1024	59049
XI.	2048	177147
XII.	4096	531441
XIII.	8192	1594323
XIV.	16384	4782969
XV.	32768	14348907
XVI.	65536	43046721
XVII.	131072	129140163
XVIII.	262144	387420489

Mais ce ſont ſur-tout les puiſſances du nombre 10 qui ſont remarquables ; car ſur ces puiſſances ſe fonde toute notre Arithmétique. En voici quelques-unes rangées par ordre, en commençant par la premiere puiſſance :

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000,	&c.

171.

Si l'on veut maintenant enviſager la choſe d'une maniere plus générale, on verra que les puiſſances d'un nombre quelconque *a* ſe ſuivent dans cet ordre :

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
a,	*aa*,	*aaa*,	*aaaa*,	*aaaaa*,	*aaaaaa*,	&c.

Mais on ne tardera pas à s'appercevoir de l'inconvénient qui accompagne cette façon d'écrire les puiſſances, & qui conſiſte en ce qu'il faudroit, pour exprimer de grandes puiſſances, écrire la même lettre très-ſouvent ; le Lecteur même n'auroit pas moins de peine, s'il étoit obligé de compter toutes ces lettres pour ſavoir quelle puiſſance on a voulu indiquer. La centieme puiſſance, par exemple, ne s'écriroit pas commodément de cette façon-là, & il ſeroit encore plus difficile de la reconnoître.

172.

Afin d'éviter cet inconvénient, on a imaginé une façon bien plus commode d'exprimer de telles puiſſances, & qui mérite à cauſe de ſon uſage étendu, d'être expliquée ſoigneuſement : ſavoir, pour exprimer, par exemple, la centieme puiſſance, on écrit ſimplement le nombre 100 au-deſſus de celui dont on veut exprimer la centieme puiſſance, & un peu vers la droite : ainſi a^{100}, qui ſignifie *a* élevé à 100, indique la centieme puiſſance de *a*. Il ne faut pas oublier qu'on donne le nom d'*expoſant* au nombre écrit au-deſſus de celui dont il indique la puiſſance ou le degré, & qui eſt 100 dans le cas que nous avons ſuppoſé.

173.

De cette maniere a^2 ſignifie donc a élevé à 2, ou la ſeconde puiſſance de a, laquelle cependant on indique auſſi quelquefois par aa, parce que l'une & l'autre expreſſion s'écrit & ſe comprend avec la même facilité. Mais déjà pour exprimer le cube ou la troiſieme puiſſance aaa, on écrit a^3 conformément à la nouvelle regle, afin de gagner de la place. De même a^4 ſignifie la quatrieme, a^5 la cinquieme, & a^6 la ſixieme puiſſance de a.

174.

En un mot toutes les puiſſances de a ſe repréſenteront par

a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, &c.

d'où l'on voit que, ſuivant cette maniere, on auroit très-bien pu écrire a^1 au lieu de a pour le premier membre de la ſérie, afin d'en mieux faire appercevoir l'ordre. En effet a^1 n'eſt autre choſe que a, vu que

cette unité indique que la lettre a ne doit s'écrire qu'une fois. Une pareille ſuite de puiſſances ſe nomme auſſi une progreſſion géométrique, parce que chaque terme eſt d'un nombre de fois plus grand que le précédent.

175.

Comme dans cette même ſuite de puiſſances chaque terme ſe trouve en multipliant par a celui qui le précede, ce qui augmente l'expoſant de 1; on peut auſſi, au moyen d'un terme donné, trouver celui qui le précede, en diviſant par a, parce que c'eſt diminuer l'expoſant d'une unité. Cela nous apprend que le terme qui précede le premier terme a^1, doit être néceſſairement $\frac{a}{a}$ ou 1; or ſi l'on ſe regle ſur les expoſans, on conclura ſans peine que ce terme qui précede le premier, doit être a^0. On peut donc déduire de-là la propriété remarquable, que a^0 eſt conſtamment égal à 1, quelque valeur grande ou petite qu'ait

le nombre a, & même quand a n'eſt rien; c'eſt-à-dire que même 0^0 fait 1.

176.

Nous pouvons continuer encore notre ſuite de puiſſances en rétrogradant, & même de deux manieres différentes: l'une en diviſant toujours par a; l'autre en diminuant l'expoſant d'une unité. Et nous ne pouvons douter que, ſuivant l'une ou l'autre façon, les termes ne ſoient parfaitement égaux. Nous allons préſenter cette ſérie rétrograde ſous l'une & l'autre forme, en avertiſſant que c'eſt auſſi à rebours, c'eſt-à-dire, en allant de la droite vers la gauche, que l'on doit la lire.

	$\frac{1}{aaaaaa}$	$\frac{1}{aaaaa}$	$\frac{1}{aaaa}$	$\frac{1}{aaa}$	$\frac{1}{aa}$	$\frac{1}{a}$	1	a
Ie.	$\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^1}$	—	—
IIe.	a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1

177.

Nous voici parvenus à connoître des puiſſances dont les expoſans ſont négatifs, & à pouvoir aſſigner exactement les valeurs de ces puiſſances. Nous mettrons ſous les yeux ce que nous avons trouvé, de la façon qui ſuit: d'abord

a^0 eſt autant que 1; enſuite

a^{-1} ——— $\frac{1}{a}$;

a^{-2} ——— $\frac{1}{aa}$ ou $\frac{1}{a^2}$;

a^{-3} ——— $\frac{1}{a^3}$;

a^{-4} ——— $\frac{1}{a^4}$,

& ainſi de ſuite.

178.

Il eſt clair auſſi par ce qui a précédé, comment on doit trouver les puiſſances d'un produit ab. Elles ſeront évidemment ab ou a^1b^1, a^2b^2, a^3b^3, a^4b^4, a^5b^5, &c. Et on trouvera de même les puiſſances des fractions; par exemple, celles de $\frac{a}{b}$ ſont

$\frac{a^1}{b^1}$, $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^4}$, $\frac{a^5}{b^5}$, $\frac{a^6}{b^6}$, $\frac{a^7}{b^7}$, &c.

179.

Enfin nous avons à considérer aussi les puissances des nombres négatifs. Or supposons donné le nombre $-a$; ses puissances se suivront dans l'ordre que voici: $-a$, $+aa$, $-a^3$, $+a^4$, $-a^5$, $+a^6$ &c.

On voit donc qu'il n'y a que les puissances dont les exposans sont des nombres impairs, qui deviennent négatives, & qu'au contraire toutes les puissances qui ont un nombre pair pour exposant, sont positives. En effet, les puissances troisieme, cinquieme, septieme, neuvieme, &c. ont toutes le signe $-$; & les puissances seconde, quatrieme, sixieme, huitieme, &c. sont affectées du signe $+$.

CHAPITRE XVII.

Du calcul des Puissances.

180.

Nous n'avons rien à observer de particulier par rapport à l'addition & à la soustraction des puissances; car on ne fait qu'indiquer ces opérations moyennant les signes $+$ & $-$, quand les puissances sont différentes entr'elles. Par exemple, $a^3 + a^2$ est la somme de la seconde & de la troisieme puissance de a; & $a^5 - a^4$ est ce qui reste en soustrayant la quatrieme puissance de a de la cinquieme; & l'on ne peut indiquer plus briévement ni l'un ni l'autre résultat. Que s'il s'agit de puissances de la même espece ou du même degré, il est clair qu'il n'est pas nécessaire de les lier par des signes: $a^3 + a^3$ fait $2a^3$, &c.

181.

Mais la multiplication des puiſſances exige qu'on faſſe attention à différentes choſes.

D'abord quand il s'agit de multiplier par a une puiſſance quelconque de a, on obtient la puiſſance ſuivante, c'eſt-à-dire, celle dont l'expoſant eſt d'une unité plus grand. Ainſi a^2, multiplié par a, fait a^3; & a^3, multiplié par a, fait a^4. Et de même, quand il s'agit de multiplier par a les puiſſances de ce nombre qui ont des expoſans négatifs, on ne fait qu'ajouter 1 à l'expoſant. Ainſi a^{-1} multiplié par a produit a^0 ou 1; ce qui eſt d'autant plus évident, que a^{-1} eſt égal à $\frac{1}{a}$, & que le produit de a par $\frac{1}{a}$ étant $\frac{a}{a}$, il eſt par conſéquent égal à 1. Par des raiſons ſemblables a^{-2}, multiplié par a, fait a^{-1} ou $\frac{1}{a}$; & a^{-10}, multiplié par a, donne a^{-9}, & ainſi de ſuite.

182.

Enſuite, s'il eſt queſtion de multiplier une puiſſance de a par aa ou par la deuxieme puiſſance, je dis que l'expoſant devient plus grand de 2. Ainſi le produit de a^2 par a^2 eſt a^4; celui de a^2 par a^3 eſt a^5; celui de a^4 par a^2 eſt a^6; & plus généralement encore, a^n multiplié par a^2 fait a^{n+2}. Pour ce qui eſt des expoſans négatifs, on aura a^1 ou a pour le produit de a^{-1} par a^2; car a^{-1} étant égal à $\frac{1}{a}$, c'eſt comme ſi l'on avoit à diviſer aa par a; par conſéquent le produit cherché eſt $\frac{aa}{a}$ ou a. De même a^{-2}, multiplié par a^2, fait a^0 ou 1; & a^{-3}, multiplié par a^2, fait a^{-1}.

183.

Il n'eſt pas moins évident que, pour multiplier une puiſſance quelconque de a par a^3, il faut en augmenter l'expoſant de trois unités; & que par conſéquent le produit de a^n par a^3 eſt a^{n+3}. Et toutes les fois

donc qu'il s'agit de multiplier ensemble deux puissances de a, on voit que le produit sera de même une puissance de a, & tel que son exposant sera la somme de ceux des deux puissances données. Par exemple, a^4 multiplié par a^5 fera a^9, & a^{12} multiplié par a^7 fera a^{19}, &c.

184.

En partant de-là on peut déterminer assez facilement des puissances très-élevées. Pour trouver, par exemple, la vingt-quatrieme puissance de 2, je multiplie la douzieme puissance par la douzieme puissance, parce que 2^{24} est autant que 2^{12} multiplié par 2^{12}. Or nous avons vu plus haut que 2^{12} fait 4096; je dis donc que c'est le nombre 16777216, ou le produit de 4096 par 4096, qui exprime la puissance cherchée 2^{24}.

185.

Passons à la division. Nous remarquerons en premier lieu, que pour diviser une

puissance de a par a, il faut soustraire 1 de l'exposant, ou le diminuer de l'unité. Ainsi a^5, divisé par a, fait a^4; a^0 ou 1, divisé par a, est autant que a^{-1} ou $\frac{1}{a}$; a^{-3}, divisé par a, fait a^{-4}.

186.

Si c'est par a^2 qu'il faut diviser une puissance donnée de a, il faudra diminuer l'exposant de 2; & si c'est par a^3, il faut soustraire trois unités de l'exposant de la puissance proposée. Ainsi en général, quelque puissance de a que ce soit qu'il s'agisse de diviser par une autre puissance quelconque de a, la regle est toujours de soustraire l'exposant de la seconde de l'exposant de la premiere de ces puissances. C'est ainsi que a^{15}, divisé par a^7, donnera a^8; que a^6, divisé par a^7, donnera a^{-1}; & que a^{-3}, divisé par a^4, donnera a^{-7}.

187.

Par ce que nous avons dit plus haut, il est facile de comprendre comment on

doit trouver les puissances des puissances, & que cela se fait par la multiplication. Quand on cherche, par exemple, le quarré ou la seconde puissance de a^3, on trouve a^6; & de la même maniere on trouve a^{12} pour la troisieme puissance, ou le cube de a^4; on voit que pour prendre le quarré d'une puissance, il n'y a qu'à doubler son exposant; que pour en prendre le cube, il faut tripler cet exposant, & ainsi de suite. Le quarré de a^n est a^{2n}; le cube de a^n est a^{3n}; la septieme puissance de a^n est a^{7n}, &c.

188.

Le quarré de a^2, ou le quarré du quarré de a étant a^4, on voit pourquoi on nomme la quatrieme puissance, le *bi-quarré* ou le *quarré-quarré*.

Le quarré de a^3 est a^6, c'est ce qui a fait donner à la sixieme puissance le nom de *quarré-cube*.

Enfin le cube de a^3 étant a^9, on appelle les neuviemes puissances *cubes-cubes*. On

n'a pas introduit d'autres dénominations de cette espece pour les puissances, & même les deux dernieres ne sont pas fort en usage.

CHAPITRE XVIII.

Des Racines relativement à toutes les Puissances en général.

189.

PUISQUE la racine quarrée d'un nombre donné est un nombre tel que son quarré est égal à ce nombre donné, & que la racine cubique d'un nombre donné est un nombre tel que son cube est égal à ce nombre donné; il s'ensuit qu'étant donné un nombre quelconque, on peut toujours en indiquer des racines telles que leur quatrieme ou leur cinquieme puissance, ou quelque autre à volonté, soit égale au nombre donné. Afin de distinguer mieux ces différentes especes de racines, nous

nommerons la racine quarrée, *racine deuxieme;* la racine cubique, *racine troiſieme;* parce que d'après cette dénomination on peut nommer *racine quatrieme*, celle dont le quarré-quarré eſt égal à un nombre donné; & *racine cinquieme*, celle dont la cinquieme puiſſance eſt égale à un nombre donné, &c.

190.

De même que la racine quarrée ou deuxieme s'indique par le ſigne $\sqrt{}$, & la racine cubique ou troiſieme, par le ſigne $\sqrt[3]{}$, on repréſente la racine quatrieme par le ſigne $\sqrt[4]{}$; la racine cinquieme par le ſigne $\sqrt[5]{}$ & ainſi de ſuite. Il eſt clair que ſuivant cette façon de s'exprimer, le ſigne de la racine quarrée devroit être $\sqrt[2]{}$. Mais comme de toutes les racines c'eſt celle-ci qui ſe préſente le plus ſouvent, on eſt convenu, pour abréger, d'omettre le nombre 2 du ſigne de cette racine. Ainſi, quand dans un ſigne

radical il ne ſe trouve pas de nombre, cela ſuppoſe toujours que c'eſt la racine quarrée qu'on a voulu indiquer.

191.

Nous allons, pour nous expliquer encore mieux, mettre ſous les yeux les différentes racines du nombre a, avec leurs ſignifications.

$\sqrt{a}$ eſt la II.e racine de a,
$\sqrt[3]{a}$ —— III.e ———— a,
$\sqrt[4]{a}$ —— IV.e ———— a,
$\sqrt[5]{a}$ —— V.e ———— a,
$\sqrt[6]{a}$ —— VI.e ———— a,
& ainſi de ſuite.

De ſorte que réciproquement:
la II.e puiſſance de $\sqrt{a}$ eſt égale à a,
la III.e ———— $\sqrt[3]{a}$ ———— a,
la IV.e ———— $\sqrt[4]{a}$ ———— a,
la V.e ———— $\sqrt[5]{a}$ ———— a,
la VI.e ———— $\sqrt[6]{a}$ ———— a,
& ainſi de ſuite.

192.

Que le nombre *a* ſoit donc grand ou petit, on comprend quel ſens on doit attacher à toutes ces racines de différens degrés.

Il faut remarquer auſſi, que ſi l'on prend pour *a* l'unité, toutes ces racines reſtent conſtamment 1; parce que toutes les puiſſances de 1 ont pour valeur l'unité. Que ſi le nombre *a* eſt plus grand que 1, toutes ſes racines auſſi ſurpaſſeront l'unité. Enfin, que ſi ce nombre eſt plus petit que 1, toutes ſes racines auſſi ſeront moindres que l'unité.

193.

Quand le nombre *a* eſt poſitif, on comprend, par ce qui a été dit plus haut des racines quarrées & cubiques, que toutes les autres racines auſſi pourront être indiquées réellement, & ſeront des nombres réels & poſſibles.

Mais ſi le nombre *a* eſt négatif, il faut que ſes racines, deuxieme, quatrieme, ſixieme, & en général toutes celles d'un degré pair, deviennent des nombres impoſſibles ou imaginaires; parce que toutes les puiſſances d'un degré pair, tant des nombres poſitifs que des nombres négatifs, ſont toujours affectées du ſigne *plus*. Au lieu que les racines troiſieme, cinquieme, ſeptieme, & en général toutes les racines impaires, deviennent négatives, mais rationnelles; parce que les puiſſances impaires de nombres négatifs, ſont négatives de même.

194.

Enfin nous avons là auſſi une ſource inépuiſable de nouvelles eſpeces de quantités ſourdes ou irrationnelles; car toutes les fois que le nombre *a* n'eſt pas réellement une puiſſance telle que le ſigne radical en indique une, ou ſemble en requérir une, il eſt impoſſible auſſi d'exprimer cette racine,

ſoit en nombres entiers, ſoit par des fractions, & par conſéquent cette racine doit alors être rangée dans la claſſe des nombres qu'on nomme irrationnels.

CHAPITRE XIX.

De la maniere d'indiquer les Nombres irrationnels par des expoſans fractionnaires.

195.

Nous venons de faire voir dans le chapitre précédent, que le quarré d'une puiſſance quelconque ſe trouve en doublant l'expoſant de cette puiſſance, & qu'en général le quarré ou la ſeconde puiſſance de a^n eſt a^{2n}. Il s'enſuit de-là l'inverſe, ſavoir, que la racine quarrée de la puiſſance a^{2n} eſt a^n, & qu'on la trouve en prenant la moitié de l'expoſant de cette puiſſance, ou en diviſant cet expoſant par 2.

196.

Ainſi la racine quarrée de a^2 eſt a^1; celle de a^4 eſt a^2; celle de a^6 eſt a^3; & ainſi de ſuite. Et comme c'eſt-là une vérité générale, on voit que la racine quarrée de a^3 doit néceſſairement être $a^{\frac{3}{2}}$, & que celle de a^5 eſt $a^{\frac{5}{2}}$. Par conſéquent on aura de même $a^{\frac{1}{2}}$ pour la racine quarrée de a^1; d'où l'on voit que $a^{\frac{1}{2}}$ eſt autant que $\sqrt{a}$; & cette nouvelle maniere d'indiquer la racine quarrée, demande qu'on y faſſe attention.

197.

Nous avons montré auſſi que pour trouver le cube d'une puiſſance comme a^n, il falloit multiplier ſon expoſant par 3, & que par conſéquent ce cube étoit a^{3n}.

Ainſi, quand il s'agit de trouver en rétrogradant la racine troiſieme, ou cubique, de la puiſſance a^{3n}, on ne fait que diviſer cet expoſant par 3, & on conclut

que la racine cherchée est a^n. Par conséquent a^1, ou a, est la racine cubique de a^3 ; a^2 est celle de a^6 ; a^3 est celle de a^9, & ainsi de suite.

198.

Rien n'empêche d'appliquer ces principes aux cas où l'exposant ne seroit pas divisible par 3, & de conclure que la racine cubique de a^2 est $a^{\frac{2}{3}}$, & que celle de a^4 est $a^{\frac{4}{3}}$ ou $a^{1\frac{1}{3}}$. Par conséquent aussi la racine troisieme, ou cubique, de a même, ou bien de a^1, doit être $a^{\frac{1}{3}}$. D'où l'on voit que $a^{\frac{1}{3}}$ est la même chose que $\sqrt[3]{a}$.

199.

Il en est de même des racines d'un degré plus élevé. La racine quatrieme de a sera $a^{\frac{1}{4}}$, laquelle expression signifie donc autant que $\sqrt[4]{a}$. La racine cinquieme de a sera $a^{\frac{1}{5}}$, ce qui est par conséquent l'équivalent de $\sqrt[5]{a}$; & ces vérités s'étendent sans difficulté à toutes les racines d'un degré plus élevé.

200.

200.

On pourroit donc se passer entiérement des signes radicaux usités, & employer à leur place les exposans fractionnaires que nous venons d'expliquer ; cependant comme on est accoutumé à ces signes depuis long-temps, & qu'on les rencontre dans tous les écrits analytiques, on auroit tort de vouloir les bannir tout-à-fait du calcul. Mais on a raison aussi de se servir beaucoup, comme l'on fait aujourd'hui, de l'autre maniere, parce qu'elle répond avec évidence à la nature de la chose. En effet, on voit sur le champ que $a^{\frac{1}{2}}$ est la racine quarrée de a, parce qu'on sait que le quarré de $a^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire, $a^{\frac{1}{2}}$ multiplié par $a^{\frac{1}{2}}$, est égal à a^1 ou a.

201.

On voit par ce qui a précédé, comment on doit interpréter tous les autres exposans rompus qui peuvent se présenter. Que si

l'on a, par exemple, $a^{\frac{4}{3}}$, cela signifie qu'il faut prendre d'abord la quatrieme puissance de a, & en extraire ensuite la racine cubique ou troisieme ; de sorte que $a^{\frac{4}{3}}$ est autant que, suivant la façon ordinaire, $\sqrt[3]{a^4}$. Que pour trouver la valeur de $a^{\frac{3}{4}}$, il faut prendre d'abord le cube ou la troisieme puissance de a, qui est a^3, & en extraire après cela la racine quatrieme ; de façon que $a^{\frac{3}{4}}$ est la même chose que $\sqrt[4]{a^3}$. De même $a^{\frac{4}{5}}$ est autant que $\sqrt[5]{a^4}$ &c.

202.

Quand la fraction qui représente l'exposant surpasse l'unité, on peut indiquer encore d'une autre maniere la valeur de la quantité proposée. Supposez que ce soit $a^{\frac{5}{2}}$; cette quantité équivaut à $a^{2\frac{1}{2}}$, qui est le produit de a^2 par $a^{\frac{1}{2}}$. Or $a^{\frac{1}{2}}$ étant égal à $\sqrt{a}$, on voit que $a^{\frac{5}{2}}$ est autant que $a^2\sqrt{a}$. De même $a^{\frac{10}{3}}$ ou $a^{3\frac{1}{3}}$ est autant que $a^3\sqrt[3]{a}$; & $a^{\frac{15}{4}}$, c'est-à-dire $a^{3\frac{3}{4}}$, signifie

$a^3\sqrt[4]{a^3}$. Ces exemples suffisent pour faire concevoir la grande utilité des exposans fractionnaires.

203.

Leur usage s'étend aussi aux nombres rompus : Qu'on ait $\frac{1}{\sqrt{a}}$, on sait que cette quantité est égale à $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$; or nous avons vu plus haut qu'une fraction de la forme $\frac{1}{a^n}$ peut s'exprimer par a^{-n}; ainsi pour $\frac{1}{\sqrt{a}}$ on peut se servir de l'expression $a^{-\frac{1}{2}}$. De même $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ est autant que $a^{-\frac{1}{3}}$. Soit proposée encore la quantité $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}}$; qu'on la transforme en celle-ci : $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}}}$, qui est le produit de a^2 par $a^{-\frac{3}{4}}$; or ce produit équivaut à $a^{\frac{5}{4}}$ ou à $a^{1\frac{1}{4}}$, ou enfin à $a\sqrt[4]{a}$. L'usage rendra faciles de semblables réductions.

204.

Enfin nous observerons que chaque racine peut se représenter d'un grand nombre de manieres. Car $\sqrt{a}$ étant la même chose que $a^{\frac{1}{2}}$, & $\frac{1}{2}$ pouvant être transformé en toutes ces fractions, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$ &c. il est clair que $\sqrt{a}$ est autant que $\sqrt[4]{a^2}$, & que $\sqrt[6]{a^3}$, & que $\sqrt[8]{a^4}$, & ainsi de suite. Pareillement, $\sqrt[3]{a}$ qui signifie $a^{\frac{1}{3}}$, sera égale à $\sqrt[6]{a^2}$ & à $\sqrt[9]{a^3}$, & à $\sqrt[12]{a^4}$. Et l'on voit de même que le nombre a, ou a^1, pourroit s'indiquer par les expressions radicales qui suivent:

$$\sqrt[2]{a^2},\ \sqrt[3]{a^3},\ \sqrt[4]{a^4},\ \sqrt[5]{a^5},\ \&c.$$

205.

Cette propriété est d'un bon usage dans la multiplication & dans la division. Car si l'on a, par exemple, à multiplier $\sqrt[2]{a}$ par $\sqrt[3]{a}$, on écrit $\sqrt[6]{a^3}$ pour $\sqrt[2]{a}$, & $\sqrt[6]{a^2}$

au lieu de $\sqrt[3]{a}$; de cette façon on obtient de part & d'autre le même signe radical, & la multiplication se faisant maintenant, donne le produit $\sqrt[6]{a^5}$. Le même résultat se déduit de ce que $a^{\frac{1}{2}}$ multiplié par $a^{\frac{1}{3}}$ fait $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$; car $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ est $\frac{5}{6}$, & par conséquent le produit en question est en effet $a^{\frac{5}{6}}$ ou $\sqrt[6]{a^5}$.

S'il s'agissoit de diviser $\sqrt[2]{a}$ ou $a^{\frac{1}{2}}$ par $\sqrt[3]{a}$ ou $a^{\frac{1}{3}}$, on auroit pour quotient $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$, ou $a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$, c'est-à-dire $a^{\frac{1}{6}}$ ou $\sqrt[6]{a}$.

CHAPITRE XX.

Qui traite en général des différentes manieres de calculer & de leur liaison.

206.

Nous avons exposé jusqu'ici différentes opérations de calcul: l'Addition, la Soustraction, la Multiplication & la Division;

l'élévation des Puiſſances, & enfin l'extraction des Racines. Il ne ſera donc pas hors de propos de remonter à l'origine de ces différentes manieres de calculer & d'expliquer la liaiſon qui eſt entr'elles, afin qu'on puiſſe s'aſſurer s'il eſt poſſible ou non qu'il exiſte encore d'autres opérations de cette eſpece. Cette recherche ne pourra que répandre plus de jour ſur les matieres que nous avons traitées.

Nous nous ſervirons dans ce deſſein d'un nouveau ſigne qu'on peut employer à la place de l'expreſſion ſi ſouvent répétée, *eſt autant que*; ce ſigne eſt celui-ci $=$, & ſe prononce *eſt égal*. Ainſi quand j'écris $a=b$, cela ſignifie que a eſt autant que b, ou que a eſt égal à b: de même, par exemple, $3.5=15$.

207.

La premiere façon de calculer qui ſe préſente à notre eſprit, eſt ſans contredit l'addition, par laquelle on ajoute deux nombres enſemble & qu'on trouve leur

ſomme. Soient donc a & b ces deux nombres propoſés, & qu'on indique leur ſomme par la lettre c, on aura $a+b=c$. Ainſi quand on connoît les deux nombres a & b, l'addition enſeigne à trouver moyennant cela le nombre c.

208.

Conſervons cette comparaiſon $a+b=c$, mais renverſons la queſtion en demandant, comment, les nombres a & c étant connus, on doit trouver le nombre b.

Il s'agit donc de ſavoir quel nombre il faut ajouter au nombre a, pour qu'il en réſulte ce nombre c. Soit, par exemple, $a=3$ & $c=8$; de ſorte qu'il faudroit que l'on eût $3+b=8$; il eſt clair qu'on trouvera b en ſouſtrayant 3 de 8. Ainſi en général, pour trouver b, il faudra ſouſtraire a de c, d'où provient $b=c-a$; car en ajoutant de nouveau a de part & d'autre, on a $b+a=c-a+a$, c'eſt-à-dire $=c$, comme on l'avoit ſuppoſé.

Et voilà donc l'origine de la ſouſtraction.

209.

Ainſi la ſouſtraction a lieu, quand on renverſe la queſtion qui donne lieu à l'addition. Or il peut arriver que le nombre qu'il s'agit de ſouſtraire ſoit plus grand que celui duquel il faut le ſouſtraire; comme, par exemple, s'il s'agiſſoit de ſouſtraire 9 de 5; ce cas eſt donc propre à nous fournir l'idée d'une nouvelle eſpece de nombres, qu'on nomme nombres négatifs, parce que $5-9=-4$.

210.

Quand pluſieurs nombres qui doivent être ajoutés enſemble ſont égaux entr'eux, leur ſomme ſe trouve par la multiplication, & ſe nomme un produit. Ainſi ab ſignifie le produit qui provient de la multiplication de a par b, ou bien de ce qu'on a ajouté enſemble un nombre a de nombres b. Si nous indiquons à préſent ce produit par la lettre c, nous aurons $ab=c$; & la multiplication nous apprend comment, les

nombres a & b étant connus, l'on doit déterminer par-là le nombre c.

211.

Propoſons-nous maintenant la queſtion ſuivante: Les nombres a & c étant connus, trouver le nombre b. Soit, par exemple, $a=3$ & $c=15$, de façon que $3b=15$, & qu'on demande par quel nombre il faut multiplier 3, pour qu'il nous vienne 15; c'eſt à quoi revient la queſtion propoſée. Or c'eſt ici le cas de la diviſion: le nombre qu'on demande ſe trouve en diviſant 15 par 3, & en général le nombre b ſe trouve donc en diviſant c par a; d'où il réſulte par conſéquent l'équation $b=\frac{c}{a}$.

212.

Or, comme il arrive ſouvent que le nombre c ne peut être diviſé réellement par le nombre a, & que cependant la lettre b doit avoir une valeur déterminée, il ſe préſente encore une nouvelle eſpece

de nombres ; ce ſont les fractions. Par exemple, en ſuppoſant $a=4$, $c=3$, de façon que $4b=3$, on voit bien que b ne ſauroit être un nombre entier, mais que ce ſera une fraction, & qu'on aura $b=\frac{3}{4}$.

213.

Nous avons vu que la multiplication provient de l'addition, c'eſt-à-dire, de ce qu'on ajoute enſemble pluſieurs quantités égales. Si nous allons à préſent plus loin, nous voyons que c'eſt à la multiplication de pluſieurs quantités égales entr'elles que les puiſſances doivent leur origine. Ces puiſſances ſe repréſentent d'une maniere générale par la formule a^b, par laquelle on entend que le nombre a doit être multiplié autant de fois par lui-même que le nombre b l'indique. Et l'on ſait, par ce qui a précédé, qu'ici a eſt ce qu'on nomme la racine, b l'expoſant, & a^b la puiſſance.

214.

Si nous indiquons maintenant cette puiſſance même par la lettre c, nous avons $a^b=c$, une équation par conſéquent dans laquelle ſe préſentent trois lettres a, b, c. Or on montre dans la théorie des puiſſances, comment une racine a avec l'expoſant b étant donnés, on doit trouver la puiſſance elle-même, c'eſt-à-dire, la lettre c. Soit, par exemple, $a=5$, & $b=3$, en ſorte que $c=5^3$: on voit qu'il faut prendre la troiſieme puiſſance de 5, qui eſt 125, & qu'ainſi $c=125$.

215.

On a vu comment, par le moyen de la racine a & de l'expoſant b, on doit déterminer la puiſſance c ; mais ſi l'on veut à préſent changer ou renverſer la queſtion, comme on a déjà fait, on verra que cela peut ſe faire de deux manieres, & qu'on a deux cas différens à conſidérer. En effet

ſi, deux de ces trois nombres a, b, c étant donnés, il s'agit de trouver le troiſieme, on voit auſſi-tôt que cette queſtion admet trois ſuppoſitions différentes, & par conſéquent trois ſolutions. Nous venons de conſidérer le cas où a & b étoient les données, nous pouvons donc ſuppoſer encore que c & a, ou bien que c & b ſoient connus & qu'il faille déterminer la troiſieme lettre. Remarquons donc, avant que d'aller plus loin, une différence aſſez eſſentielle entre l'élévation des puiſſances & les deux opérations qui conduiſent à celle-là. Lorſque dans l'addition nous avons renverſé la queſtion, nous n'avons pu le faire que d'une ſeule maniere; il étoit indifférent de prendre c & a ou c & b pour données, parce qu'il eſt indifférent d'écrire $a+b$ ou d'écrire $b+a$. Il en étoit de même de la multiplication; on pouvoit pareillement prendre les lettres a & b l'une pour l'autre, l'équation $ab=c$ étant exactement la même que $ba=c$.

Dans le calcul des puiſſances, au contraire la même choſe n'a pas lieu, & on ne peut point du tout écrire b^a au lieu de a^b. Un ſeul exemple ſuffit pour s'en convaincre : Soit $a=5$, & $b=3$; on a $a^b=5^3=125$. Mais $b^a=3^5=243$: deux réſultats très-différens.

216.

Il eſt donc clair qu'on peut réellement ſe propoſer encore deux queſtions : l'une, de trouver la racine a par le moyen de la puiſſance donnée c, & de l'expoſant b. L'autre, de trouver l'expoſant b, en ſuppoſant connues la puiſſance c & la racine a.

217.

On peut dire que la premiere de ces queſtions a été réſolue dans le chapitre de l'extraction des racines. Car, par exemple, ſi $b=2$ & que $a^2=c$, nous ſavons que cela ſignifie que a eſt un nombre tel que ſon quarré ſoit égal à c, & par conſéquent

que $a = \sqrt[2]{c}$. De même, ſi $b = 3$ & $a^3 = c$, on ſait qu'il faut que le cube de a ſoit égal au nombre donné c, & conſéquemment que $a = \sqrt[3]{c}$. Il eſt donc aiſé de conclure généralement de-là comment on doit déterminer la lettre a par le moyen des lettres c & b: il faut néceſſairement que $a = \sqrt[b]{c}$.

218.

Nous avons auſſi déjà fait remarquer la conſéquence qui s'enſuit du cas très-fréquent où le nombre donné c n'eſt pas réellement une puiſſance ; ſavoir qu'alors la racine cherchée a ne peut s'exprimer ni par des nombres entiers, ni par des fractions. Et comme cette racine doit avoir cependant néceſſairement une valeur déterminée, la même remarque nous a conduits à une nouvelle eſpece de nombres que nous avons dit qu'on nommoit nombres *ſourds* ou *irrationnels*, & que nous avons vus ſe diviſer en une infinité d'eſpeces à cauſe de la

grande diverſité des racines. Enfin la même conſidération nous a appris à connoître l'eſpece particuliere de nombres, qu'on a nommée *nombres imaginaires*.

219.

Il nous reſte à conſidérer la ſeconde queſtion, qui étoit de déterminer l'expoſant par le moyen de la puiſſance c & de la racine a, toutes deux connues. Cette queſtion, qui ne s'étoit pas encore préſentée, nous conduira à l'importante théorie des Logarithmes, dont l'uſage eſt ſi étendu dans toutes les Mathématiques, qu'il y a peu de long calcul dont on puiſſe venir à bout ſans ſon ſecours. On verra dans le chapitre ſuivant, pour lequel nous réſervons cette théorie, qu'elle nous fait parvenir à une eſpece de nombres encore tout-à fait nouvelle, & qu'on ne peut pas même compter parmi les nombres irrationnels dont nous avons parlé.

CHAPITRE XXI.

Des Logarithmes en général.

220.

EN reprenant l'équation $a^b = c$, nous commencerons par remarquer que dans la doctrine des logarithmes on adopte pour la racine a un certain nombre pris à volonté, & qu'on suppose que cette racine conserve invariablement la valeur adoptée. Cela posé, on prend l'exposant b tel, que la puissance a^b devienne égale à un nombre donné c, & c'est alors cet exposant b qu'on dit être le *logarithme* du nombre c. Nous nous servirons, pour exprimer cette signification, de la lettre L. ou des lettres initiales *log*. Ainsi en écrivant $b = L.c$, ou $b = log.c$, on indique que b est égale au logarithme du nombre c, ou bien que le logarithme de c est b.

221.

On voit donc que la valeur de la racine a une fois établie, le logarithme d'un nombre quelconque c n'est autre chose que l'exposant de la puissance de a, qui est égale à c. C'est ainsi que c étant $= a^b$, b est le logarithme de la puissance a^b. Si l'on suppose à présent que $b = 1$, on a 1 pour le logarithme de a^1, & par conséquent $L.a = 1$. Si l'on suppose $b = 2$, on a 2 pour le logarithme de a^2; c'est-à-dire, $L.a^2 = 2$. On peut obtenir de la même maniere, $L.a^3 = 3$; $L.a^4 = 4$; $L.a^5 = 5$, & ainsi de suite.

222.

Si l'on fait $b = 0$, on voit que 0 sera le logarithme de a^0: or $a^0 = 1$; par conséquent $L.1 = 0$, quelque valeur qu'on donne à la racine a.

Que si l'on suppose $b = -1$, ce sera -1 qui sera le logarithme de a^{-1}. Or

$a^{-1}=\frac{1}{a}$; on a donc L.$\frac{1}{a}=-1$. On aura pareillement L.$\frac{1}{a^2}=-2$; L.$\frac{1}{a^3}=-3$; L.$\frac{1}{a^4}=-4$, &c.

223.

Il eſt donc évident comment on peut indiquer les logarithmes de toutes les puiſſances de la racine a, & même ceux de fractions qui ont pour numérateur l'unité, & pour dénominateur une puiſſance de a. On voit auſſi que dans tous ces cas les logarithmes ſont des nombres entiers; mais il faut obſerver que ſi b étoit une fraction, elle ſeroit le logarithme d'un nombre irrationnel. Car ſi l'on ſuppoſe, par exemple, $b=\frac{1}{2}$, il ſuit que $\frac{1}{2}$ eſt le logarithme de $a^{\frac{1}{2}}$ ou de $\sqrt{a}$; par conſéquent on a L.$\sqrt{a}=\frac{1}{2}$. On trouvera de même L.$\sqrt[3]{a}=\frac{1}{3}$; L.$\sqrt[4]{a}=\frac{1}{4}$, &c.

224.

Mais s'il s'agit de trouver le logarithme d'un autre nombre c, on voit aiſément qu'il ne peut être ni un nombre entier, ni une fraction. Cependant il faut qu'il exiſte un expoſant b, tel que la puiſſance a^b devienne égale au nombre propoſé: on a donc $b=$L.c. Donc généralement $a^{\text{L}.c}=c$.

225.

Conſidérons à préſent un autre nombre d, dont le logarithme ait été indiqué d'une maniere ſemblable par L.d; de façon que $a^{\text{L}.d}=d$. Si nous multiplions cette formule par la précédente $a^{\text{L}.c}=c$, nous aurons $a^{\text{L}.c+\text{L}.d}=cd$; or l'expoſant eſt toujours le logarithme de la puiſſance; par conſéquent L.$c+$L.$d=$L.cd.

Que ſi au lieu de multiplier nous diviſions la premiere formule par la ſeconde, nous obtiendrions $a^{\text{L}.c-\text{L}.d}=\frac{c}{d}$; & par conſéquent L.$c-$L.$d=$L.$\frac{c}{d}$.

226.

C'est ainsi que nous avons été conduits à la découverte des deux principales propriétés des logarithmes, qui consistent dans les équations $L. c + L. d = L. cd$, & $L. c - L. d = L. \frac{c}{d}$. La premiere de ces équations nous apprend que le logarithme d'un produit, comme cd, se trouve en ajoutant ensemble les logarithmes des facteurs. La seconde nous indique la propriété, que le logarithme d'une fraction peut se déterminer en soustrayant le logarithme du dénominateur de celui du numérateur.

227.

Il s'ensuit donc de-là, que quand il s'agit de multiplier ou de diviser deux nombres l'un par l'autre, on n'a besoin que d'ajouter ou de soustraire leurs logarithmes. Et c'est-là précisément en quoi consiste l'utilité insigne des logarithmes dans le calcul.

Car qui ne voit qu'il est incomparablement plus aisé d'ajouter ou de soustraire des nombres, que d'en multiplier ou d'en diviser, sur-tout quand la question roule sur de grands nombres.

228.

Les logarithmes offrent des avantages encore plus grands, dans le calcul des puissances & dans l'extraction des racines. Car si $d = c$, on a par la premiere propriété $L. c + L. c = L. cc$; par conséquent $L. cc = 2 L. c$. On obtient pareillement $L. c^3 = 3 L. c$; $L. c^4 = 4 L. c$; & en général $L. c^n = n L. c$.

Si l'on substitue maintenant à n des nombres rompus, on aura, par exemple, $L. c^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire, $L. \sqrt{c} = \frac{1}{2} L. c$.

Enfin, si l'on suppose que n représente des nombres négatifs, on aura $L. c^{-1}$ ou $L. \frac{1}{c} = - L. c$; $L. c^{-2}$ ou $L. \frac{1}{cc} = - 2 L. c$, & ainsi de suite. Cela suit non-seulement de l'équation $L. c^n = n L. c$, mais aussi de

ce que, comme nous l'avons vu plus haut, L. 1 = 0.

229.

Si l'on a donc des tables dans lesquelles les logarithmes se trouvent calculés pour tous les nombres, on a, comme l'on voit, un puissant secours pour venir facilement à bout de calculs très-prolixes, qui exigeroient beaucoup de multiplications, de divisions, d'élévations de puissances & d'extractions de racines. Car on trouveroit dans ces tables non-seulement les logarithmes pour tous les nombres, mais aussi les nombres pour les logarithmes. Par exemple, s'il est question de chercher la racine quarrée du nombre c, on cherche d'abord le logarithme de c, qui est L. c, & prenant ensuite la moitié de ce logarithme, ou $\frac{1}{2}$L. c, on sait qu'on a le logarithme de la racine quarrée qu'on cherche. On n'a donc qu'à voir dans les tables quel nombre répond à ce logarithme, on est assuré qu'il exprime la racine cherchée.

230.

Nous avons vu plus haut que les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. c'est-à-dire tous les nombres positifs, sont des logarithmes de la racine a & de ses puissances positives, & par conséquent des logarithmes de nombres plus grands que l'unité. Et au contraire que les nombres négatifs, comme —1, —2, &c. sont les logarithmes des fractions $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$ &c. qui sont plus petites que l'unité, mais cependant encore plus grandes que rien.

Il suit de-là que si le logarithme est positif, le nombre est toujours plus grand que l'unité; mais que si le logarithme est négatif, le nombre est toujours plus petit que 1, & pourtant plus grand que zéro. Par conséquent on ne sauroit indiquer des logarithmes de nombres négatifs, & il faut en conclure que les logarithmes des nombres négatifs sont impossibles, & qu'ils appartiennent à la classe des quantités imaginaires.

231.

Il sera bon, afin d'éclaircir tout cela encore mieux, d'adopter un nombre déterminé pour la racine a, & nous choisirons celui-là même sur lequel on a fondé les tables logarithmiques ordinaires. C'est le nombre 10; on lui a donné la préférence, parce qu'il sert déjà de base à toute notre Arithmétique. Mais on voit facilement que tout autre nombre, pourvu qu'il fût plus grand que l'unité, pourroit servir au même usage. Quant à la raison pourquoi on ne pourroit pas supposer $a=1$, elle est claire; toutes les puissances a^b seroient constamment égales à l'unité, & ne pourroient jamais devenir égales à un autre nombre donné c.

CHAPITRE XXII.

Des Tables de Logarithmes usitées.

232.

DANS ces tables on part de la supposition, comme nous venons de le dire, que la racine $a=10$. Ainsi le logarithme d'un nombre quelconque c est l'exposant auquel il faut élever le nombre 10, pour qu'il en résulte une puissance égale au nombre c. Ou bien, si l'on désigne le logarithme de c par $L.c$, on aura toujours $10^{L.c}=c$.

233.

Nous avons déjà fait remarquer que le logarithme du nombre 1 est toujours 0; & en effet on a $10^0=1$; par conséquent: $L.1=0$; $L.10=1$; $L.100=2$; $L.1000=3$; $L.10000=4$; $L.100000=5$; $L.1000000=6$.

De plus

$L.\frac{1}{10}=-1$; $L.\frac{1}{100}=-2$; $L.\frac{1}{1000}=-3$;
$L.\frac{1}{10000}=-4$; $L.\frac{1}{100000}=-5$;
$L.\frac{1}{1000000}=-6$.

234.

Ces logarithmes des nombres principaux se déterminent, comme on voit, sans aucune peine. Mais il est d'autant plus difficile de trouver les logarithmes de tous les autres nombres, & cependant il est nécessaire qu'on les insere dans les tables. Ce n'est pas ici encore le lieu de donner toutes les instructions requises pour cette recherche, nous nous contenterons pour le présent de voir en général ce qu'elle exige.

235.

D'abord, puisque $L.1 = 0$ & $L.10 = 1$, il est évident que les logarithmes de tous les nombres entre 1 & 10 doivent être compris entre 0 & 1, & être par conséquent plus grands que 0 & plus petits que 1.

Nous n'avons qu'à considérer le seul nombre 2; il est certain que son logarithme est plus grand que 0, & cependant plus petit que l'unité; & si nous désignons ce logarithme par la lettre x, en sorte que $L.2 = x$, il faut que la valeur de cette lettre soit telle qu'on ait exactement $10^x = 2$.

Il est facile aussi de se convaincre que x doit être beaucoup plus petit que $\frac{1}{2}$ ou ce qui revient au même, que $10^{\frac{1}{2}}$ est plus grand que 2. Car si nous prenons de part & d'autre les quarrés, on trouve le quarré de $10^{\frac{1}{2}} = 10^1$ & celui de $2 = 4$; or ce dernier est de beaucoup moindre que le premier. De même $\frac{1}{3}$ est encore une valeur trop grande pour x, c'est-à-dire que $10^{\frac{1}{3}}$ est plus grand que 2. Car le cube de $10^{\frac{1}{3}}$ est 10, & celui de 2 ne fait que 8. Mais au contraire en ne faisant x que de $\frac{1}{4}$ on lui donneroit une valeur trop petite, parce que la quatrieme puissance de $10^{\frac{1}{4}}$ étant 10 & celle de 2 étant 16, il est clair que $10^{\frac{1}{4}}$ est moindre que 2.

On voit que x ou le $L.2$ est plus petit que $\frac{1}{3}$, & cependant plus grand que $\frac{1}{4}$. On peut déterminer de la même maniere à

l'égard de toute fraction contenue entre $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{3}$, si elle est trop grande ou si elle est trop petite. En tentant, par exemple, avec $\frac{2}{7}$, qui est une fraction moindre que $\frac{1}{3}$, & plus grande que $\frac{1}{4}$, il faudroit que 10^x, ou $10^{\frac{2}{7}}$, fût $= 2$; ou bien que la septieme puissance de $10^{\frac{2}{7}}$, c'est-à-dire 10^2 ou 100, fût égale à la septieme puissance de 2; or celle-ci est $= 128$, & par conséquent plus grande que celle-là. Nous concluons donc de-là que $10^{\frac{2}{7}}$ est aussi moindre que 2, & qu'ainsi $\frac{2}{7}$ est moindre que L. 2, & que L. 2 qui s'étoit trouvé plus petit que $\frac{1}{3}$ est cependant plus grand que $\frac{2}{7}$.

Essayons encore une autre fraction qui soit, en conséquence de ce que nous venons de trouver, comprise entre $\frac{2}{7}$ & $\frac{1}{3}$. Une telle fraction est $\frac{3}{10}$, & il s'agit donc de voir si $10^{\frac{3}{10}} = 2$; si cela est, les dixiemes puissances de ces deux nombres sont aussi égales entr'elles; or la dixieme puissance de $10^{\frac{3}{10}}$ est $10^3 = 1000$, & la dixieme

puissance de 2 est $= 1024$; il faut donc conclure que $10^{\frac{3}{10}}$ n'est pas $= 2$, que $\frac{3}{10}$ est une fraction trop petite pour produire cette égalité, & que le L. 2, quoique plus petit que $\frac{1}{3}$ est cependant plus grand que $\frac{3}{10}$.

236.

Cette considération sert à nous faire voir que L. 2 a une grandeur déterminée, puisque nous savons que ce logarithme est certainement plus grand que $\frac{3}{10}$ & plus petit que $\frac{1}{3}$. Nous ne pouvons pas aller plus loin pour le présent, & puisque nous ignorons encore la vraie valeur de ce logarithme, nous l'indiquerons par x, en sorte que L. $2 = x$; & nous montrerons comment, si elle étoit connue, on pourroit en déduire les logarithmes d'une infinité d'autres nombres. Nous nous servirons pour cet effet de l'équation rapportée plus haut L. $cd =$ L. $c +$ L. d, qui renferme la propriété, que le logarithme d'un produit se

trouve en ajoutant ensemble les logarithmes des facteurs.

237.

D'abord, comme $L.2=x$, & $L.10=1$, nous aurons $L.20=x+1$; $L.200=x+2$; $L.2000=x+3$; $L.20000=x+4$; & $L.200000=x+5$, &c.

238.

De plus, comme $L.c^2=2L.c$ & $L.c^3=3L.c$ & $L.c^4=4L.c$, &c. nous avons $L.4=2x$; $L.8=3x$; $L.16=4x$; $L.32=5x$; $L.64=6x$, &c. & nous trouvons par-là que

$L.40=2x+1$; $L.400=2x+2$;
$L.4000=2x+3$; $L.40000=2x+4$, &c.
$L.80=3x+1$; $L.800=3x+2$;
$L.8000=3x+3$; $L.80000=3x+4$, &c.
$L.160=4x+1$; $L.1600=4x+2$;
$L.16000=4x+3$; $L.160000=4x+4$ &c.

239.

Reprenons aussi l'autre équation fondamentale, $L.\frac{c}{d}=L.c-L.d$, & supposons $c=10$, & $d=2$; puisque $L.10=1$ & $L.2=x$, nous aurons $L.\frac{10}{2}$ ou $L.5=1-x$, & nous déduirons de-là les équations suivantes :

$L.50=2-x$; $L.500=3-x$;
$L.5000=4-x$, &c.
$L.25=2-2x$; $L.125=3-3x$;
$L.625=4-4x$, &c.
$L.250=3-2x$; $L.2500=4-2x$;
$L.25000=5-2x$, &c.
$L.1250=4-3x$; $L.12500=5-3x$;
$L.125000=6-3x$, &c.
$L.6250=5-4x$; $L.62500=6-4x$;
$L.625000=7-4x$, &c.

& ainsi de suite.

240.

Si l'on connoissoit le logarithme de 3, ce seroit encore le moyen de déterminer un nombre prodigieux d'autres logarithmes. En voici quelques preuves, en supposant le L.3 exprimé par la lettre y.

$L.30=y+1$; $L.300=y+2$;
$L.3000=y+3$, &c.

L. 9 = 2 y; L. 27 = 3 y; L. 81 = 4 y;
L. 243 = 5 y; &c.

On aura aussi

L. 6 = $x + y$; L. 12 = $2x + y$;
L. 18 = $x + 2y$;
& L. 15 = L. 3 + L. 5 = $y + 1 - x$.

241.

Nous avons vu plus haut que tous les nombres proviennent de la multiplication des nombres qu'on nomme premiers. Si l'on connoissoit donc seulement les logarithmes de tous les nombres premiers, on pourroit trouver par de simples additions les logarithmes de tous les autres nombres. Le nombre 210, par exemple, étant formé des facteurs 2, 3, 5, 7, son logarithme sera = L. 2 + L. 3 + L. 5 + L. 7. Pareillement, puisque $360 = 2.2.2.3.3.5 = 2^3 3^2 5$, on a L. 360 = 3 L. 2 + 2 L. 3 + L. 5. Il est donc clair que moyennant les logarithmes des nombres premiers, on peut déterminer ceux de tous les autres nombres, & que c'est

à déterminer ceux-là qu'il faut s'attacher avant toutes choses, si l'on se propose de construire des tables de logarithmes.

CHAPITRE XXIII.

De la maniere de représenter les Logarithmes.

242.

Nous avons vu que le logarithme de 2 est plus grand que $\frac{3}{10}$ & plus petit que $\frac{1}{3}$, & que par conséquent l'exposant de 10 doit tomber entre ces deux fractions, pour que la puissance devienne = 2. Or quoiqu'on sache cela, quelque fraction cependant qu'on adopte conformément à cette condition, la puissance qui en résulte sera toujours un nombre irrationnel, plus grand ou plus petit que 2; & par conséquent le logarithme de 2 ne sauroit être exprimé par une telle fraction. Cela fait qu'il faut se contenter de déterminer la valeur de ce

logarithme d'une maniere assez approchée pour que l'erreur devienne insensible. On se sert pour cela des *fractions décimales ;* c'est ainsi qu'on nomme des quantités, dont la nature & les propriétés méritent d'être mises dans tout le jour possible.

243.

On sait que dans la maniere ordinaire d'écrire les nombres avec le secours des dix chiffres ou caracteres

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

il n'y a que le premier chiffre à droite qui ait sa signification naturelle ; que les chiffres à la seconde place signifient dix fois plus que ce qu'ils signifieroient à la premiere ; que les chiffres à la troisieme place signifient cent fois davantage ; & ceux à la quatrieme mille fois davantage, & ainsi de suite ; c'est-à-dire qu'à mesure qu'ils avancent vers la gauche ils acquierent une valeur dix fois plus grande qu'ils n'avoient au rang précédent. C'est ainsi que dans le

nombre 1765 le chiffre 5 est au premier rang à la droite, & signifie aussi 5 réellement. Au second rang est 6 ; mais ce chiffre, au lieu de signifier 6, indique 10.6 ou 60. Le chiffre 7 est au troisieme rang, & signifie 100.7 ou 700. Enfin le 1, qui est au quatrieme rang, signifie 1000 ; voilà donc pourquoi on prononce le nombre proposé de cette maniere,

Un mille (ou *mille,*) *sept cent, soixante & cinq.*

244.

Puisque la valeur des chiffres devient toujours dix fois plus grande en allant de la droite vers la gauche, & que par conséquent elle devient continuellement dix fois moindre en allant de la gauche vers la droite, on pourra en se conformant à cette loi avancer encore davantage vers la droite, & on obtiendra des chiffres dont la signification continuera de devenir dix fois moindre. Mais à quoi il faudra bien

faire attention, c'est la place où les chiffres ont leur valeur naturelle, on l'indique par une virgule qu'on met après ce rang. Si l'on rencontre donc, par exemple, le nombre 36,54892, voici comme il faut l'entendre: le chiffre 6 d'abord a sa valeur naturelle; & le chiffre 3, qui est au second rang, signifie 30. Mais le chiffre 5 qui vient après la virgule, ne signifie que $\frac{5}{10}$; ensuite le 4 ne vaut que $\frac{4}{100}$; le chiffre 8 signifie $\frac{8}{1000}$; le chiffre 9 signifie $\frac{9}{10000}$; & le chiffre 2 $\frac{2}{100000}$. On voit donc que plus ces chiffres avancent vers la droite, plus leurs valeurs diminuent, & qu'à la fin ces valeurs deviennent si petites, qu'on peut avec raison les regarder comme nulles (*).

(*) Les opérations de l'Arithmétique se pratiquent sur les fractions décimales de la même maniere que sur les nombres entiers; il y a seulement quelques précautions à prendre après l'opération pour placer la virgule qui sépare les nombres entiers des décimales. On peut consulter sur ce sujet presque tous les Traités d'Arithmétique. Lorsque dans la multiplication de ces fractions le multiplicande & le multiplicateur ont un grand nombre de décimales, l'opération seroit fort longue & donneroit un résultat beaucoup plus exact qu'on n'en a besoin communément; mais on peut la simplifier par une méthode qui ne se trouve pas dans beaucoup d'Auteurs, & que M. *Marie* a indiquée dans son édition des Leçons de Mathématiques de M. *de la Caille*, où il explique aussi une méthode semblable pour la division des décimales.

245.

Voilà l'espece de nombres qu'on nomme *fractions décimales*, & c'est de cette maniere aussi qu'on indique les logarithmes dans les tables. On y exprime, par exemple, le logarithme de 2 par 0,3010300, où nous voyons 1°. que puisqu'il y a un 0 devant la virgule, ce logarithme ne fait pas un entier; 2°. que sa valeur est $\frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{0}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{0}{1000000} + \frac{0}{10000000}$. On peut remarquer qu'on auroit bien pu omettre les deux derniers zéros, mais c'est qu'ils servent à indiquer que le logarithme en question ne contient aucune de ces parties qui ont 1000000 & 10000000 pour dénominateur. On ne nie pas au reste qu'on

n'eût pu trouver, en continuant encore, des parties plus petites; mais pour ce qui eſt de celles-ci on les néglige à cauſe de leur extrême petiteſſe.

246.

Le logarithme de 3 ſe trouve exprimé dans les tables par 0,4771213; on voit donc qu'il ne contient point d'entier, & qu'il eſt compoſé des fractions ſuivantes: $\frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{2}{100000} + \frac{1}{1000000} + \frac{3}{10000000}$. Mais il ne faut pas croire que de cette maniere le logarithme ſoit aſſigné avec la derniere préciſion. On peut ſeulement être certain que l'erreur eſt moindre que de $\frac{1}{10000000}$; il eſt vrai d'un autre côté que cette erreur eſt ſi petite, qu'on peut très-bien la négliger dans la plupart des calculs.

247.

Suivant cette façon d'exprimer les logarithmes, celui de 1 doit être indiqué

par 0,0000000, puiſqu'il eſt réellement $=0$. Le logarithme de 10 eſt 1,0000000, où l'on reconnoît qu'il eſt exactement $=1$. Le logarithme de 100 eſt 2,0000000, ou exactement $=2$. Et l'on peut en conclure que les logarithmes de tous les nombres qui ſont contenus entre 10 & 100, & par conſéquent compoſés de deux chiffres, que ces logarithmes, dis-je, ſont compris entre 1 & 2, & par conſéquent qu'ils doivent s'exprimer par $1 +$ une fraction décimale. C'eſt ainſi que L. $50 = 1,6989700$; ſa valeur eſt donc l'unité, & outre cela $\frac{6}{10} + \frac{9}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{7}{100000}$. On n'aura pas de peine à remarquer de même que les logarithmes des nombres entre 100 & 1000 s'expriment par 2 entiers avec une fraction décimale. Ceux des nombres entre 1000 & 10000, par $3 +$ une fraction décimale. Ceux des nombres entre 10000 & 100000 par 4 entiers joints à une telle fraction, & ainſi de ſuite. Le *log.* 800, par exemple, eſt $=2,9030900$; celui de 2290 eſt 3,3598355, &c.

248.

Les logarithmes au contraire des nombres moindres que 10, ou qui ne s'expriment que par un ſeul chiffre, ne font pas un entier, & voilà pourquoi on trouve un o devant la virgule. Ainſi nous avons deux parties à conſidérer dans un logarithme. La premiere eſt celle qui précede la virgule & qui indique les entiers quand il y en a; l'autre indique les fractions décimales qu'il faut ajouter aux entiers. La partie premiere ou entiere d'un logarithme, qu'on nomme le plus ſouvent la *caractériſtique*, ſe détermine facilement d'après ce que nous avons dit dans l'article précédent. Elle eſt o pour tous les nombres qui n'ont qu'un chiffre; elle eſt 1 pour ceux qui en ont deux; elle eſt 2 pour ceux qui en ont trois, & en général elle eſt toujours d'une unité moindre que le nombre des chiffres. Si donc on demande le logarithme de 1766, on ſait déjà que la premiere partie, ou celle des entiers, eſt 3 néceſſairement.

249.

Ainſi réciproquement on reconnoît à la premiere inſpection de la premiere partie d'un logarithme, de combien de chiffres eſt composé le nombre qui répond à ce logarithme; puiſque le nombre de ces figures eſt toujours d'une unité plus grand que la partie des entiers du logarithme. Si on avoit trouvé, par exemple, pour le logarithme d'un nombre inconnu 6,4771213, on ſauroit d'abord que ce nombre doit être de ſept chiffres, & plus grand que 1000000. Et en effet ce nombre eſt 3000000; car *log.* 3000000 = L. 3 + L. 1000000. Or L. 3 = 0,4771213, & L. 1000000 = 6, & la ſomme de ces deux logarithmes eſt 6,4771213.

250.

Le principal pour chaque logarithme eſt donc la fraction décimale qui ſuit la virgule, laquelle même une fois connue ſert pour pluſieurs nombres. Pour prouver ceci,

considérons le logarithme du nombre 365: sa premiere partie est 2 sans contredit; quant à l'autre ou la fraction décimale, indiquons-la, pour abréger, par la lettre x. Nous avons donc L. $365 = 2 + x$. Or en multipliant continuellement par 10, nous aurons L. $3650 = 3 + x$; L. $36500 = 4 + x$; L. $365000 = 5 + x$, & ainsi de suite. Mais nous pouvons aussi rebrousser & diviser continuellement par 10, cela nous donnera L. $36,5 = 1 + x$; L. $3,65 = 0 + x$; L. $0,365 = -1 + x$; L. $0,0365 = -2 + x$; L. $0,00365 = -3 + x$, & ainsi de suite.

251.

Tous ces nombres donc qui proviennent des figures 365, soit précédées, soit suivies de zéros, ont toujours la même fraction décimale pour seconde partie du logarithme; & toute la différence roule sur le nombre entier qui est devant la virgule, lequel peut même, comme nous avons vu, devenir négatif, savoir quand le nombre

proposé est plus petit que 1. Or comme les Calculateurs ordinaires ont de la peine à traiter les nombres négatifs, on a coutume dans ces cas d'augmenter de 10 les entiers du logarithme, c'est-à-dire qu'on écrit 10 au lieu de 0 devant la virgule. De sorte qu'à la place de -1 on a 9; au lieu de -2 on a 8; au lieu de -3 on a 7, &c. Mais il ne faut jamais oublier alors que la caractéristique a été prise de dix unités trop grande, & ne pas s'imaginer que le nombre est de 10, ou 9 ou 8 chiffres. On sent bien que si dans le cas dont nous parlons cette caractéristique est plus petite que 10, on ne peut commencer à écrire les chiffres du nombre qu'après une virgule. Par exemple, que si la caractéristique est 9, on doit commencer au premier rang après une virgule; que si elle est 8, il faut mettre encore un zéro à ce premier rang, & ne commencer à écrire les chiffres qu'au second rang. C'est ainsi que 9,5622929 seroit le logarithme de

0,365, & 8,5622929 le log. de 0,0365. Mais c'eſt dans les tables des ſinus principalement qu'on fait uſage de cette maniere d'écrire les logarithmes.

252.

On trouve dans les tables ordinaires les décimales des logarithmes pouſſées juſqu'à ſept chiffres ou figures, dont la derniere par conſéquent indique les $\frac{1}{10000000}$, & on eſt sûr qu'ils ne ſont jamais en défaut d'une telle petite partie entiere, & que l'erreur ne peut donc être d'aucune importance. Il y a cependant des calculs où l'on a beſoin d'une préciſion encore plus particuliere; on ſe ſert alors des grandes tables de *Vlacq*, où les logarithmes ſe trouvent calculés en dix décimales.

253.

Comme la premiere partie, ou la caractériſtique d'un logarithme, n'eſt ſujette à aucune difficulté, on l'indique rarement

dans les tables; on n'y exprime que la ſeconde partie, ou les ſept figures de la fraction décimale. On a des tables angloiſes où l'on trouve les logarithmes de tous les nombres depuis 1 juſqu'à 100000, & même ceux de nombres plus grands, parce que de petites tables additionnelles indiquent ce qu'il faut ajouter aux logarithmes, à raiſon des chiffres que les nombres propoſés ont de plus que dans les tables. On trouve, par exemple, le logarithme de 379456 facilement, par le moyen de celui de 37945 & des petites tables dont nous parlons (*).

(*) Ces tables angloiſes ſont celles que *Scherwin* publia au commencement de ce ſiecle, & qui ont été réimprimées pluſieurs fois; on les trouve auſſi dans les tables de *Gardiner*, dont les Aſtronomes ſe ſervent communément, & qui viennent d'être réimprimées à Avignon. Il eſt bon de remarquer à l'égard de ces tables, que comme les logarithmes n'y ſont pouſſés que juſqu'à ſept caracteres, abſtraction faite de la caractériſtique, on ne peut par leur moyen opérer avec une entiere exactitude que ſur des nombres qui n'ayent pas plus de ſix caracteres; mais quand on emploie les grandes tables de *Vlacq*,

254.

On comprendra aiſément par ce qui a été dit, comment, ayant trouvé un logarithme, on doit prendre dans les tables le

où les logarithmes ſont pouſſés juſqu'à dix caracteres en décimales, on peut, en prenant les parties proportionnelles, opérer, ſans commettre aucune erreur, ſur des nombres qui ayent juſqu'à neuf caracteres. La raiſon de ce que nous venons de dire & les moyens de faire ſervir facilement ces tables à des opérations ſur de plus grands nombres, ſe trouvent très-bien expliqués dans les *Elémens d'Algebre de* SAUNDERSON, Liv. IX, IIe Part.

Ces tables, au reſte, ne donnent directement que les logarithmes qui répondent à des nombres propoſés, & lorſqu'on veut repaſſer des logarithmes aux nombres, comme on rencontre rarement dans les tables le logarithme que l'on a, on eſt obligé le plus ſouvent de chercher ces nombres par une méthode d'interpolation, c'eſt-à-dire, par une voie indirecte. Pour ſuppléer à ce défaut on a calculé en Angleterre une autre table, qui a été publiée à Londres en 1742, ſous le titre de *The Anti-logarithmie Canon, &c. by James* DODSON, & qui eſt encore aſſez peu connue; on y trouve les décimales des logarithmes rangées par ordre depuis 0,0001 juſqu'à 1,0000, & à côté les nombres correſpondans pouſſés juſqu'à onze chiffres; on y trouve auſſi les parties proportionnelles néceſſaires pour déterminer les nombres qui répondent aux logarithmes intermédiaires qui ne ſe trouvent pas dans la table.

nombre qui lui convient. Cela deviendra encore plus clair par un exemple: multiplions les nombres 343 & 2401. Puiſqu'il faut ajouter enſemble les logarithmes, on écrira le calcul de la façon qui ſuit:

$$\left.\begin{array}{l}\text{L. } 343 = 2{,}5352941 \\ \text{L. } 2401 = 3{,}3803922\end{array}\right\}\text{ ajoutés}$$

$$\left.\begin{array}{r}5{,}9156863 \\ 6847\end{array}\right\}\text{ ſouſtrayés}$$

$$16.$$

Le nombre cherché eſt donc 823543.

Car la ſomme eſt le logarithme du produit cherché; on voit par ſa caractériſtique 5 que ce produit eſt compoſé de ſix chiffres, & ceux-ci ſe trouvent par le moyen de la fraction décimale & de la table, être 823543.

255.

Comme c'eſt en particulier dans l'extraction des racines que les logarithmes

rendent de grands ſervices, donnons auſſi un exemple de la maniere dont on les applique à cette partie du calcul. Suppoſez qu'il s'agiſſe d'extraire la racine quarrée de 10. Vous diviſez ſimplement par 2 le logarithme de 10, qui eſt 1,0000000; le quotient 0,5000000 eſt le logarithme de la racine cherchée. Or le nombre qui dans les tables répond à ce logarithme, eſt 3,16228, dont le quarré eſt effectivement égal à 10, à un cent millieme près dont il eſt plus grand.

SECTION SECONDE.

Des différentes Méthodes de Calcul pour les Grandeurs compoſées ou complexes.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Addition des Quantités complexes.

256.

LORSQU'ON a deux ou pluſieurs formules compoſées de pluſieurs termes à ajouter enſemble, on ne fait ſouvent qu'indiquer cette addition par des ſignes, en mettant chaque formule entre deux parentheſes, & en la liant avec les autres par le moyen du ſigne +. S'il s'agit, par exemple, d'ajouter enſemble les formules

$a+b+c$ & $d+e+f$, on indique la ſomme en cette maniere :

$$(a+b+c)+(d+e+f).$$

257.

On ſent bien que ce n'eſt pas là effectuer l'addition, que ce n'eſt que l'indiquer. Mais on voit auſſi que pour la faire réellement on n'a qu'à omettre les crochets; car le nombre $d+e+f$ devant être ajouté à l'autre, on ſait que cela ſe fait en y joignant d'abord $+d$, enſuite $+e$ & enſuite $+f$; ce qui donne donc la ſomme $a+b+c+d+e+f$.

On ſuivroit la même voie, ſi quelques-uns des termes étoient affectés du ſigne —; il faudroit les joindre de la même façon, moyennant le ſigne qui leur eſt propre.

258.

Afin de rendre ceci plus clair, nous conſidérerons un exemple en nombres purs; nous nous propoſerons d'ajouter à la formule $12-8$ cette autre, $15-6$. Si nous

commençons donc par ajouter 15, nous aurons $12-8+15$; or c'étoit ajouter trop, puiſqu'il ne falloit ajouter que $15-6$, & il eſt clair que c'eſt 6 que nous avons ajouté de trop. Otons, reprenons donc ces 6 en les écrivant avec leur ſigne négatif, nous aurons la ſomme véritable

$$12-8+15-6.$$

D'où l'on voit que les ſommes ſe trouvent en écrivant tous les termes, chacun avec le ſigne qui lui eſt propre.

259.

S'il eſt donc queſtion d'ajouter la formule $d-e-f$ à la formule $a-b+c$, on exprimera la ſomme ainſi :

$$a-b+c+d-e-f,$$

en remarquant cependant qu'il n'importe en rien dans quel ordre on écrit ces termes. On peut les changer de place à volonté, pourvu qu'on leur conſerve leurs ſignes. Cette ſomme pourroit, par exemple, s'écrire ainſi :

$$c-e+a-f+d-b.$$

260.

On voit assez que l'addition ne souffre aucune difficulté, de quelque forme que soient les termes à ajouter. S'il falloit ajouter ensemble les formules $2a^3 + 6\sqrt{b} - 4\text{L}.c$ & $5\sqrt[5]{a} - 7c$, on écriroit

$$2a^3 + 6\sqrt{b} - 4\text{L}.c + 5\sqrt[5]{a} - 7c,$$

soit dans cet ordre même, soit en changeant cet ordre des termes. La somme reviendra toujours à cela, si l'on ne change pas les signes.

261.

Mais il arrive souvent que les sommes trouvées de cette maniere peuvent se réduire considérablement : savoir, quand deux ou plusieurs termes se détruisent les uns les autres. Par exemple, si l'on rencontre dans une même somme les termes $+a-a$ ou $3a-4a+a$; ou bien quand on peut réduire deux ou plusieurs termes en un seul. Voici des exemples de cette seconde réduction :

$$3a+2a=5a;\ 7b-3b=+4b;$$
$$-6c+10c=+4c;$$
$$5a-8a=-3a;\ -7b+b=-6b;$$
$$-3c-4c=-7c;$$
$$2a-5a+a=-2a;\ -3b-5b+2b=-6b.$$

On peut donc abréger toutes les fois que deux ou plusieurs termes sont entiérement les mêmes quant aux lettres. Mais il ne faut pas confondre ces cas avec ceux-ci $2aa+3a$, ou $2b^3-b^4$; ceux de cette espece ne souffrent point de réduction.

262.

Considérons encore quelques exemples de réduction ; le suivant nous conduira d'abord à une vérité très-utile. Supposez qu'il faille ajouter ensemble les formules $a+b$ & $a-b$; notre regle donne $a+b+a-b$; or $a+a=2a$, & $b-b=0$; la somme est donc $2a$; par conséquent si l'on ajoute ensemble la somme de deux nombres $(a+b)$ & leur différence $(a-b)$, on obtient le double du plus grand de ces deux nombres.

Voici encore d'autres exemples :

$3a - 2b - c$	$a^3 - 2aab + 2abb$
$5b - 6c + a$	$-aab + 2abb - b^3$
$4a + 3b - 7c$	$a^3 - 3aab + 4abb - b^3$.

CHAPITRE II.

De la Soustraction des Quantités complexes.

263.

SI on ne veut qu'indiquer la soustraction, on enferme chaque formule entre deux crochets, en joignant par le signe — la formule qui doit être soustraite à celle dont il faut la soustraire.

En soustrayant, par exemple, la formule $d - e + f$ de la formule $a - b + c$, on trouve le reste

$$(a - b + c) - (d - e + f);$$

& cette façon de l'indiquer donne suffisamment à connoître laquelle des deux formules doit être soustraite de l'autre.

264.

Mais quand on veut effectuer réellement la soustraction, il faut observer premiérement, qu'en soustrayant d'une quantité a une autre quantité positive $+b$, on obtient $a - b$. En second lieu, qu'en soustrayant de a une quantité négative $-b$, on obtient $a + b$; parce qu'ôter à quelqu'un une dette est autant que lui donner quelque chose.

265.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de soustraire de la formule $a - c$ la formule $b - d$, on ôtera d'abord b; ce qui donne $a - c - b$: or c'étoit ôter la quantité d de trop, puisqu'il ne falloit soustraire que $b - d$; il faudra donc restituer la valeur de d, & on aura

$$a - c - b + d;$$

d'où il est évident qu'il faut changer les signes des termes de la formule à soustraire,

& les joindre avec ces ſignes contraires aux termes de l'autre formule.

266.

Il eſt donc facile, moyennant cette regle, de faire la ſouſtraction, puiſqu'on ne fait qu'écrire, telle qu'elle eſt, la formule de laquelle il faut ſouſtraire, & que l'autre s'y joint ſans autre changement que celui des ſignes. C'eſt ainſi que dans le premier exemple, où il s'agiſſoit de ſouſtraire de $a-b+c$ la formule $d-e+f$, on obtient $a-b+c-d+e-f$.

Un exemple en nombres rendra cela encore plus clair. Si on ſouſtrait la formule $6-2+4$ de $9-3+2$, on obtient

$$9-3+2-6+2-4=0,$$

cela eſt évident; car $9-3+2=8$; de même $6-2+4=8$; or $8-8=0$.

267.

La ſouſtraction n'étant donc ſujette à aucune difficulté, il ne reſte qu'à faire

remarquer que ſi dans le reſte il ſe trouve deux ou pluſieurs termes tout-à-fait ſemblables quant aux lettres, ce reſte peut ſe réduire à une expreſſion plus abrégée, ſuivant les mêmes regles que nous avons données pour les ſommes dans l'addition.

268.

Qu'on ait à ſouſtraire de $a+b$, ou de la ſomme de deux quantités, leur différence $a-b$, on aura d'abord $a+b-a+b$; or $a-a=0$ & $b+b=2b$; le reſte cherché eſt donc $2b$, c'eſt-à-dire le double de la plus petite des deux quantités.

269.

Les exemples ſuivans tiendront lieu d'éclairciſſemens ultérieurs:

$aa+ab+bb$	$3a-4b+5c$
$bb+ab-aa$	$2b+4c-6a$
$2aa.$	$9a-6b+c.$

$$\begin{array}{r} a^3+3aab+3abb+b^3 \\ a^3-3aab+3abb-b^3 \\ \hline 6aab+2b^3. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{a}+2\sqrt{b} \\ \sqrt{a}-3\sqrt{b} \\ \hline +5\sqrt{b}. \end{array}$$

CHAPITRE III.

De la multiplication des Quantités complexes.

270.

LORSQU'IL n'eſt queſtion que d'indiquer ſimplement une telle multiplication, on met entre deux crochets chacune des formules qui doivent être multipliées enſemble, & on les joint les unes aux autres, quelquefois ſans aucun ſigne, quelquefois en mettant un point ou le ſigne × entre deux. Par exempl. pour indiquer le produit

des deux formules $a-b+c$ & $d-e+f$ multipliées l'une par l'autre, on écrit $(a-b+c).(d-e+f)$ ou $(a-b+c)\times(d-e+f)$.

On ſe ſert beaucoup de cette façon d'indiquer les produits, parce qu'elle donne à connoître ſur le champ de quels facteurs ils ſont compoſés.

271.

Mais pour montrer comment on doit s'y prendre pour faire une multiplication effective, nous remarquerons d'abord que pour multiplier, par exemple, une formule comme $a-b+c$ par 2, on en multiplie chaque terme ſéparément par ce nombre, de ſorte qu'on obtient

$$2a-2b+2c.$$

Or la même choſe a lieu pour tous les autres nombres. Si c'étoit par d qu'il fallût multiplier la même formule, on obtiendroit

$$ad-bd+cd.$$

272.

Nous avons ſuppoſé tout-à-l'heure que *d* étoit un nombre poſitif; mais ſi c'eſt par un nombre négatif comme $-e$, que la multiplication doit ſe faire, il faut ſe rappeller la regle que nous avons donnée plus haut, que deux ſignes contraires multipliés enſemble font $-$, & que deux ſignes égaux donnent $+$. On aura donc:

$$-ae+be-ce.$$

273.

Pour faire voir à préſent comment une formule, comme *A*, qu'elle ſoit ſimple ou complexe, doit être multipliée par une formule complexe $d-e$; nous conſidérerons d'abord un exemple en nombres ordinaires, en ſuppoſant que *A* doive être multiplié par $7-3$. Or il eſt évident que c'eſt ici le quadruple de *A* qu'on demande; car ſi l'on prend d'abord *A* ſept fois, il faudra ſouſtraire enſuite *A* pris trois fois.

En général donc s'il s'agit de multiplier par $d-e$, on multipliera la formule *A* d'abord par *d* & enſuite par *e*, & on ſouſtraira ce dernier produit du premier; d'où réſulte $dA-eA$.

Suppoſons maintenant $A=a-b$, & que c'eſt cette quantité-ci qu'il faut multiplier par $d-e$; nous aurons

$$dA=ad-bd$$
$$eA=ae-be;$$

donc le prod. cherc. $=ad-bd-ae+be.$

274.

Puiſque nous connoiſſons donc le produit $(a-b).(d-e)$, & que nous n'avons pas lieu de douter de ſa juſteſſe, nous nous remettrons le même exemple de multiplication ſous les yeux, ſous la forme que voici:

$$\begin{array}{l} a-b \\ d-e \\ \hline ad-bd-ae+be. \end{array}$$

Il nous fait voir qu'il faut multiplier chaque terme de la formule ſupérieure par chaque terme de la formule inférieure, & que pour ce qui regarde les ſignes il faut obſerver ſtrictement la regle donnée plus haut; regle qui ſe confirmeroit par-là entiérement, ſi elle avoit pu être révoquée en doute le moins du monde.

275.

Il ſera facile, d'après cette regle, de calculer l'exemple ſuivant, qui eſt de multiplier $a+b$ par $a-b$:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline aa+ab \\ -ab-bb \\ \hline \end{array}$$

le produit ſera $= aa-bb$.

276.

On ſait qu'on peut ſubſtituer pour a & b des nombres déterminés à volonté; ainſi

l'exemple que nous venons de donner, renferme le principe que voici: le produit de la ſomme de deux nombres multipliée par leur différence eſt égal à la différence des quarrés de ces nombres. On peut exprimer cette vérité en cette maniere:

$$(a+b)\times(a-b) = aa-bb.$$

Et on en conclut cette autre vérité: que la différence de deux nombres quarrés eſt toujours un produit, & diviſible tant par la ſomme que par la différence des racines de ces deux quarrés; & que par conſéquent la différence de deux quarrés ne peut jamais être un nombre premier.

277.

Calculons encore quelques autres exemples:

I.) $$\begin{array}{r} 2a-3 \\ a+2 \\ \hline 2aa-3a \\ +4a-6 \\ \hline 2aa+a-6. \end{array}$$

II.) $$\begin{array}{r} 4aa-6a+9 \\ 2a+3 \\ \hline 8a^3-12aa+18a \\ +12aa-18a+27 \\ \hline 8a^3+27. \end{array}$$

III.) $3aa - 2ab - bb$

$$\begin{array}{l} 3aa - 2ab - bb \\ 2a - 4b \\ \hline 6a^3 - 4aab - 2abb \\ \quad - 12aab + 8abb + 4b^3 \\ \hline 6a^3 - 16aab + 6abb + 4b^3. \end{array}$$

IV.)

$$\begin{array}{l} aa + 2ab + 2bb \\ aa - 2ab + 2bb \\ \hline a^4 + 2a^3b + 2aabb \\ \quad - 2a^3b - 4aabb - 4ab^3 \\ \qquad + 2aabb + 4ab^3 + 4b^4 \\ \hline a^4 + 4b^4. \end{array}$$

V.)

$$\begin{array}{l} 2aa - 3ab - 4bb \\ 3aa - 2ab + bb \\ \hline 6a^4 - 9a^3b - 12aabb \\ \quad - 4a^3b + 6aabb + 8ab^3 \\ \qquad + 2aabb - 3ab^3 - 4b^4 \\ \hline 6a^4 - 13a^3b - 4aabb + 5ab^3 - 4b^4. \end{array}$$

VI.)

V I.)

$$\begin{array}{l} aa + bb + cc - ab - ac - bc \\ a + b + c \\ \hline a^3 + abb + acc - aab - aac - abc \\ \quad - abb - acc + aab + aac - abc + b^3 + bcc - bbc \\ \qquad - abc - bcc + bbc + c^3 \\ \hline a^3 - 3abc + b^3 + c^3. \end{array}$$

278.

Lorſqu'on a plus de deux formules à multiplier enſemble, on comprendra ſans doute qu'après en avoir multiplié deux l'une par l'autre, il faut enſuite multiplier ce produit par une de celles qui reſtent, & ainſi de ſuite; & qu'il eſt indifférent quel ordre on ſuive dans ces multiplications. Qu'on ſe propoſe, par exemple, de trouver la valeur du produit ſuivant compoſé de quatre facteurs:

I.	II.	III.	IV.
$(a+b)$	$(aa+ab+bb)$	$(a-b)$	$(aa-ab+bb)$,

on multipliera d'abord les facteurs I & II:

$$\begin{array}{rl} \text{II.} & aa+ab+bb \\ \text{I.} & a+b \\ \hline & a^3+aab+abb \\ & \quad +aab+abb+b^3 \\ \hline \text{I. II.} & a^3+2aab+2abb+b^3. \end{array}$$

Après cela on multipliera les facteurs III & IV:

$$\begin{array}{rl} \text{IV.} & aa-ab+bb \\ \text{III.} & a-b \\ \hline & a^3-aab+abb \\ & \quad -aab+abb-b^3 \\ \hline \text{III. IV.} & a^3-2aab+2abb-b^3. \end{array}$$

Il reste donc à multiplier le premier produit I, II, par ce second produit III, IV:

$$\begin{array}{l} a^3+2aab+2abb+b^3 \quad \text{I. II.} \\ a^3-2aab+2abb-b^3 \quad \text{III. IV.} \\ \hline a^6+2a^5b+2a^4bb+a^3b^3 \\ \quad -2a^5b-4a^4bb-4a^3b^3-2aab^4 \\ \quad\quad +2a^4bb+4a^3b^3+4aab^4+2ab^5 \\ \quad\quad\quad -a^3b^3-2aab^4-2ab^5-b^6 \\ \hline a^6-b^6. \end{array}$$

Et ceci est le produit cherché.

279.

Reprenons le même exemple, mais changeons-en l'ordre, en multipliant d'abord les formules I & III, & ensuite les formules II & IV:

$$\begin{array}{rl} \text{I.} & a+b \\ \text{III.} & a-b \\ \hline & aa+ab \\ & \quad -ab-bb \\ \hline \text{I. III.} & =aa-bb. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{II.} & aa+ab+bb \\ \text{IV.} & aa-ab+bb \\ \hline & a^4+a^3b+aabb \\ & \quad -a^3b-aabb-ab^3 \\ & \quad\quad +aabb+ab^3+b^4 \\ \hline \text{II. IV.} & =a^4+aabb+b^4. \end{array}$$

Multipliant enfin ces deux produits I, III & II, IV :

II. IV. $=a^4+aabb+b^4$
I. III. $=aa-bb$

$$\begin{array}{l} a^6+a^4bb+aab^4 \\ \quad -a^4bb-aab^4-b^6 \\ \hline \end{array}$$

on a a^6-b^6,

qui eſt le produit cherché.

280.

Nous ferons ce calcul encore dans un autre ordre, en multipliant d'abord la I.e formule par la IV.e, & enſuite la II.e par la III.e

$$\begin{array}{ll} \text{IV.} & aa-ab+bb \\ \text{I.} & a+b \\ \hline & a^3-aab+abb \\ & \quad +aab-abb+b^3 \\ \hline \end{array}$$

I. IV. $=a^3+b^3$.

$$\begin{array}{ll} \text{II.} & aa+ab+bb \\ \text{III.} & a-b \\ \hline & a^3+aab+abb \\ & \quad -aab-abb-b^3 \\ \hline \end{array}$$

II. III. $=a^3-b^3$.

Il reſte à multiplier les produits I, IV & II, III.

I. IV. $= a^3+b^3$
II. III. $= a^3-b^3$

$$\begin{array}{l} a^6+a^3b^3 \\ \quad -a^3b^3-b^6 \\ \hline \end{array}$$

& l'on trouve encore a^6-b^6.

281.

Il eſt à propos d'éclaircir cet exemple par une application numérique. Faiſons $a=3$ & $b=2$, nous aurons $a+b=5$ & $a-b=1$; de plus, $aa=9$, $ab=6$, $bb=4$. Donc $aa+ab+bb=19$ & $aa-ab+bb=7$. Donc on demande le produit de 5.19.1.7, qui eſt 665.

Or $a^6 = 729$ & $b^6 = 64$, par conséquent le produit cherché $a^6 - b^6 = 665$, comme nous venons de le dire.

CHAPITRE IV.

De la Division des Quantités complexes.

282.

QUAND on ne veut qu'indiquer la division, on se sert ou de la marque ordinaire des fractions, qui est d'écrire le dénominateur sous le numérateur, & en les séparant par un trait; ou bien de deux crochets qui renferment chaque formule, & en mettant deux points entre le diviseur & le dividende. S'il est question, par exemple, de diviser $a + b$ par $c + d$, on indique le quotient ainsi, $\frac{a+b}{c+d}$, suivant la premiere maniere; & de cette façon, $(a + b):(c + d)$, suivant la seconde. L'une & l'autre expression se prononce $a + b$ *divisé par* $c + d$.

283.

S'il s'agit de diviser une formule composée par une formule simple, on divise chaque terme séparément. Par exemple: $6a - 8b + 4c$ divisé par 2 fait $3a - 4b + 2c$; & $(aa - 2ab):(a) = a - 2b$. De même $(a^3 - 2aab + 3abb):(a) = aa - 2ab + 3bb$; $(4aab - 6aac + 8abc):(2a) = 2ab - 3ac + 4bc$; $(9aabc - 12abbc + 15abcc):(3abc) = 3a - 4b + 5c$ &c.

284.

S'il arrive qu'un des termes du dividende ne soit pas divisible par le diviseur, on indique le quotient par une fraction, comme dans la division de $a + b$ par a, qui donne $1 + \frac{b}{a}$. De même $(aa - ab + bb):(aa) = 1 - \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa}$.

Par la même raison, si l'on divise $2a + b$ par 2, on obtient $a + \frac{b}{2}$; & on peut remarquer à cette occasion qu'on pourroit écrire $\frac{1}{2}b$ au lieu de $\frac{b}{2}$, parce que $\frac{1}{2}$ fois b

eſt autant que $\frac{b}{2}$. Pareillement $\frac{b}{3}$ eſt autant que $\frac{1}{3}b$, & $\frac{2b}{3}$ autant que $\frac{2}{3}b$, &c.

285.

Mais quand le diviſeur eſt lui-même une quantité complexe, la diviſion a plus de difficultés. Souvent elle a lieu où on s'en doute le moins; mais lorſqu'elle ne peut ſe faire, il faut ſe contenter d'indiquer le quotient par une fraction, de la maniere que nous avons dit. Nous commencerons par conſidérer quelques cas où la diviſion effective réuſſit.

286.

Suppoſons qu'il s'agiſſe de diviſer le dividende $ac-bc$ par le diviſeur $a-b$, il faut donc que le quotient ſoit tel qu'étant multiplié par le diviſeur $a-b$, on obtienne le dividende $ac-bc$. Or on voit aiſément que ce quotient doit renfermer un c, puiſque ſans cela on ne pourroit obtenir ac. Afin donc de voir ſi c eſt le quotient entier,

on n'a qu'à le multiplier par le diviſeur, & voir ſi cette multiplication produit le dividende en entier, ou ſi elle n'en donne qu'une partie. Dans notre cas, ſi nous multiplions $a-b$ par c, nous avons $ac-bc$ qui eſt en effet le dividende même; de ſorte que c eſt le quotient complet. Il n'eſt pas moins clair que

$(aa+ab):(a+b)=a$; $(3aa-2ab):(3a-2b)=a$; $(6aa-9ab):(2a-3b)=3a$, &c.

287.

On ne peut manquer de cette maniere de trouver une partie du quotient; ſi donc ce qu'on a vu multiplié par le diviſeur, n'épuiſe pas encore le dividende, on n'a qu'à diviſer le réſidu encore par le diviſeur, pour obtenir une ſeconde partie du quotient; & l'on continuera de la même maniere juſqu'à ce qu'on ait trouvé le quotient en entier.

Diviſons, afin de donner un exemple, $aa+3ab+2bb$ par $a+b$; il eſt clair en

premier lieu que le quotient contiendra le terme a, puiſque, ſi cela n'étoit pas, on n'obtiendroit point aa. Or en multipliant le diviſeur $a+b$ par a, il provient $aa+ab$; laquelle quantité étant ſouſtraite du dividende, laiſſe un reſte $2ab+2bb$. Ce reſte, il faut auſſi le diviſer par $a+b$; & il ſaute aux yeux que le quotient de cette diviſion doit contenir le terme $2b$. Or $2b$ multiplié par $a+b$ fait exactement $2ab+2bb$; par conſéquent $a+2b$ eſt ce quotient cherché qui, multiplié par le diviſeur $a+b$, doit produire le dividende $aa+3ab+2bb$. Voici toute l'opération :

$$a+b)\,aa+3ab+2bb\,(a+2b$$
$$aa+ab$$
$$\overline{+2ab+2bb}$$
$$+2ab+2bb$$
$$\overline{\quad 0. \quad}$$

288.

On ſe facilite cette opération en faiſant choix d'un des termes du diviſeur pour

l'écrire le premier, & pour ranger enſuite les termes du dividende, en commençant par les plus hautes puiſſances de ce premier terme du diviſeur. Ce terme étoit a dans l'exemple précédent. Les exemples ſuivans rendront la choſe encore plus claire :

$$a-b)\,a^3-3aab+3abb-b^3\,(aa-2ab+bb$$
$$a^3-aab$$
$$\overline{-2aab+3abb}$$
$$-2aab+2abb$$
$$\overline{+abb-b^3}$$
$$+abb-b^3$$
$$\overline{\quad 0. \quad}$$

$$a+b)\,aa-bb\,(a-b$$
$$aa+ab$$
$$\overline{-ab-bb}$$
$$-ab-bb$$
$$\overline{\quad 0. \quad}$$

$3a-2b)\ 18aa-8bb\ (6a+4b$

$18aa-12ab$

$+12ab-8bb$

$+12ab-8bb$

$0.$

$a+b)\ a^3+b^3\ (aa-ab+bb$

a^3+aab

$-aab+b^3$

$-aab-abb$

$+abb+b^3$

$+abb+b^3$

$0.$

$2a-b)\ 8a^3-b^3\ (4aa+2ab+bb$

$8a^3-4aab$

$+4aab-b^3$

$+4aab-2abb$

$+2abb-b^3$

$+2abb-b^3$

$0.$

$aa-2ab+bb)\ a^4-4a^3+6aabb-4ab^3+b^4$

$aa-2ab+bb)\ a^4-2a^3b+aabb$

$-2a^3b+5aabb-4ab^3$

$-2a^3b+4aabb-2ab^3$

$+aabb-2ab^3+b^4$

$+aabb-2ab^3+b^4$

$0.$

$aa-2ab+4bb)\ a^4+4aabb+16b^4$

$aa+2ab+4bb)\ a^4-2a^3b+4aabb$

$+2a^3b+16b^4$

$+2a^3b-4aabb+8ab^3$

$+4aabb-8ab^3+16b^4$

$+4aabb-8ab^3+16b^4$

$0.$

$aa-2ab+2bb)\ a^4+4b^4$

$aa+2ab+2bb)\ a^4-2a^3b+2aabb$

$+2a^3b-2aabb+4b^4$

$+2a^3b-4aabb+4ab^3$

$+2aabb-4ab^3+4b^4$

$+2aabb-4ab^3+4b^4$

$0.$

$$
\begin{array}{l}
1-2x+xx)\ 1-5x+10xx-10x^3+5x^4-x^5 \\
1-3x+3xx-x^3)\ 1-2x+xx \\
\qquad -3x+9xx-10x^3 \\
\qquad -3x+6xx-\ 3x^3 \\
\qquad\quad +3xx-\ 7x^3+5x^4 \\
\qquad\quad +3xx-\ 6x^3+3x^4 \\
\qquad\qquad -\ \ x^3+2x^4-x^5 \\
\qquad\qquad -\ \ x^3+2x^4-x^5 \\
\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

CHAPITRE V.

De la Résolution des Fractions en des suites infinies (*).

289.

QUAND le dividende n'est pas divisible par le diviseur, le quotient s'exprime, comme nous l'avons déjà dit, par une fraction.

(*) La *théorie des séries* est une des plus importantes de toutes les Mathématiques. Les séries dont il est question

C'est ainsi que si l'on doit diviser 1 par $1-a$, on obtient la fraction $\frac{1}{1-a}$. Cela n'empêche pas cependant qu'on ne puisse entreprendre la division suivant les regles que nous avons données, & qu'on ne puisse la continuer aussi loin qu'on veut. On ne laissera pas de trouver le vrai quotient, quoique sous des formes différentes.

290.

Pour le prouver, divisons réellement le dividende 1 par le diviseur $1-a$, comme on va voir:

dans ce chapitre, ont été trouvées par *Mercator* au milieu du siecle passé, & *Newton* trouva bientôt après celles qui dérivent de l'extraction des racines, & dont il sera question au chapitre XII. Cette théorie a reçu ensuite un nouveau degré de perfection de plusieurs autres Géometres distingués. Les Œuvres de *Jacques Bernoulli* & la seconde partie du *Calcul différentiel* de M. *Euler*, sont les ouvrages où l'on pourra le mieux s'instruire sur ces matieres. On trouvera aussi dans les Mémoires de Berlin pour 1768, une nouvelle méthode de M. *de la Grange* pour résoudre, par le moyen des suites infinies, toutes les équations littérales de quelque degré qu'elles soient.

$1-a)\ 1\ (1+\frac{a}{1-a}$ ou $1-a)\ 1\ (1+a+\frac{aa}{1-a}$

$+1-a$ $\qquad\qquad$ $+1-a$

résidu $+a.$ $\qquad\qquad$ $+a$

$+a-aa$

résidu $+aa.$

Pour trouver encore un plus grand nombre de formes, on n'a qu'à continuer en divisant aa par $1-a$:

$1-a)\ aa\ (aa+\frac{a^3}{1-a}$ ensuite $1-a)\ a^3\ (a^3+\frac{a^4}{1-a}$

$aa-a^3$ $\qquad\qquad$ a^3-a^4

$+a^3$ $\qquad\qquad$ $+a^4$

& puis $1-a)\ a^4\ \ (a^4+\frac{a^5}{1-a}$

a^4-a^5

$+a^5$, &c.

291.

Nous voyons par là que la fraction $\frac{1}{1-a}$ peut se mettre sous toutes les formes qui suivent:

I.) $1+\frac{a}{1-a}$; II.) $1+a+\frac{aa}{1-a}$;

III.) $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$;

IV.) $1+a+aa+a^3+\frac{a^4}{1-a}$;

V.) $1+a+aa+a^3+a^4+\frac{a^5}{1-a}$, &c.

Or en considérant la premiere de ces formules, qui est $1+\frac{a}{1-a}$, & en faisant attention que 1 est autant que $\frac{1-a}{1-a}$, nous avons

$$1+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a+a}{1-a}=\frac{1}{1-a}.$$

Si on suit le même procédé pour la seconde formule $1+a+\frac{aa}{1-a}$, c'est-à-dire que l'on réduise la partie des entiers $1+a$ au même dénominateur $1-a$, on aura $\frac{1-aa}{1-a}$, à quoi si l'on ajoute $+\frac{aa}{1-a}$ on aura $\frac{1-aa+aa}{1-a}$, c'est-à-dire $\frac{1}{1-a}$.

Dans la 3e. formule $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$, les entiers, réduits au dénominateur $1-a$, font $\frac{1-a^3}{1-a}$; & si on y ajoute la fraction $\frac{a^3}{1-a}$ on a $\frac{1}{1-a}$; donc toutes ces formules

sont en effet égales en valeur à la fraction proposée $\frac{1}{1-a}$.

292.

Cela étant on pourra aller plus loin & aussi loin qu'on voudra, sans avoir besoin de calculer davantage. On aura donc $\frac{1}{1-a} = 1 + a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \frac{a^8}{1-a}$; ou bien on pourroit continuer encore, & même sans jamais finir. C'est pourquoi l'on peut dire que la fraction proposée a été résolue en une suite infinie, laquelle est, $1 + a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} +$ &c. à l'infini. Et on est très-fondé à soutenir que la valeur de cette série infinie est la même que celle de la fraction $\frac{1}{1-a}$.

293.

Ce que nous venons de dire peut, au premier abord, paroître étonnant; mais la considération de quelques cas particuliers le fera comprendre aisément.

Supposons premiérement $a = 1$; notre suite deviendra $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, &c. jusqu'à l'infini. La fraction $\frac{1}{1-a}$, à laquelle elle doit être égale, devient $\frac{1}{0}$; or nous avons remarqué plus haut que $\frac{1}{0}$ est un nombre infiniment grand; cela se confirme donc ici d'une maniere élégante.

Mais si l'on suppose $a = 2$, notre suite devient $= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$, &c. à l'infini, & sa valeur doit être $\frac{1}{1-2}$, c'est-à-dire $\frac{1}{-1} = -1$; ce qui au premier coup d'œil semblera absurde. Mais il faut remarquer que si l'on veut s'arrêter à quelque terme de la série susdite, on ne doit le faire qu'en joignant la fraction qui reste. Supposons, par exemple, que nous voulions nous arrêter à 64, il faudra, après avoir écrit $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$, joindre la fraction $\frac{128}{1-2}$ ou $\frac{128}{-1}$ ou -128; on aura donc $127 - 128$, c'est-à-dire en effet -1.

Que si on continuoit sans cesse la suite,

il ne seroit à la vérité plus question de la fraction, mais aussi on ne s'arrêteroit jamais.

294.

Voilà donc des considérations nécessaires, quand on prend pour a des nombres plus grands que l'unité. Mais si l'on suppose a plus petit que 1, tout devient plus facile à concevoir.

Soit, par exemple, $a = \frac{1}{2}$; on aura $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, ce qui sera égal à la série suivante: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ &c. à l'infini. Or si l'on prend deux termes seulement de cette suite, on a $1 + \frac{1}{2}$, & il s'en faut de $\frac{1}{2}$ qu'elle ne soit égale à $\frac{1}{1-a} = 2$. Si on prend trois termes, il s'en faut encore de $\frac{1}{4}$; car la somme est $1\frac{3}{4}$. Si l'on prend quatre termes on a $1\frac{7}{8}$, & il ne manque plus que $\frac{1}{8}$. On voit donc que plus on prend de termes, & plus la différence devient petite, & que par conséquent si

on continue à l'infini, il n'y aura plus de différence du tout entre la somme de la suite & la valeur 2 de la fraction $\frac{1}{1-a}$.

295.

Soit $a = \frac{1}{3}$; notre fraction $\frac{1}{1-a}$ sera $= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, à quoi se réduit par conséquent la suite $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ &c. jusqu'à l'infini.

Quand on prend deux termes on a $1\frac{1}{3}$, & il manque $\frac{1}{6}$. Si vous prenez trois termes, vous avez $1\frac{4}{9}$, & il manquera encore $\frac{1}{18}$. Prenez quatre termes, vous aurez $1\frac{13}{27}$, & la différence est $\frac{1}{54}$. Puis donc que l'erreur devient toujours trois fois moindre, il faut bien qu'à la fin elle s'évanouisse.

296.

Supposons $a = \frac{2}{3}$; nous aurons $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$, & la suite $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243}$ &c. jusqu'à l'infini. Prenant d'abord $1\frac{2}{3}$,

l'erreur eſt $1\frac{1}{3}$; prenant trois termes, qui font $2\frac{1}{9}$, l'erreur eſt de $\frac{8}{9}$; prenant quatre termes on a $2\frac{11}{27}$, & l'erreur eſt encore de $\frac{16}{27}$.

297.

Si $a = \frac{1}{4}$, la fraction eſt $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = 1\frac{1}{3}$; & la ſuite devient $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$, &c. Les deux premiers termes faiſant $1 + \frac{1}{4}$, produiront $\frac{1}{12}$ d'erreur; & prenant un terme de plus on a $1\frac{5}{16}$, c'eſt-à-dire ſeulement $\frac{1}{48}$ d'erreur.

298.

On pourra de la même maniere réſoudre en ſérie infinie la fraction $\frac{1}{1+a}$, en diviſant réellement le numérateur 1 par le dénominateur $1+a$, comme on va voir:

$$
\begin{array}{l}
1+a)\ 1 \quad (1-a+aa-a^3+a^4 \\
\underline{1+a} \\
-a \\
\underline{-a-aa} \\
+aa \\
\underline{+aa+a^3} \\
-a^3 \\
\underline{-a^3-a^4} \\
+a^4 \\
\underline{+a^4+a^5} \\
-a^5, \&c.
\end{array}
$$

d'où il ſuit que la fraction $\frac{1}{1+a}$ eſt égale à la ſuite,

$1 - a + aa - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7$, &c.

299.

Si l'on poſe $a = 1$, on a cette comparaiſon remarquable:

$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$, &c. à l'infini. On y trouvera quelque choſe de contradictoire; car ſi on s'arrête à -1,

la série donne o; & si on finit par $+1$, elle donne 1. Mais c'est-là précisément ce qui tranche le nœud; car puisqu'on doit continuer jusqu'à l'infini sans s'arrêter jamais ni à -1, ni à $+1$, il est clair que la somme ne peut être ni o ni 1, & qu'il faut que ce résultat final tienne un milieu entre ces deux, & qu'il soit $\frac{1}{2}$.

300.

Faisons à présent $a=\frac{1}{2}$, notre fraction sera $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$, laquelle doit donc exprimer la valeur de la série $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$, &c. à l'infini. Si l'on ne prend de cette série que les deux premiers termes, on a $\frac{1}{2}$, ce qui est trop peu de $\frac{1}{6}$. Si l'on prend trois termes, on a $\frac{3}{4}$, ce qui est trop de $\frac{1}{12}$. Si l'on prend quatre termes, on a $\frac{5}{8}$, ce qui est trop peu de $\frac{1}{24}$, &c.

301.

Supposons encore $a=\frac{1}{3}$; notre fraction sera $=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$, & c'est à quoi doit se réduire la série $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\frac{1}{243}+\frac{1}{729}$, &c. à l'infini. Or en considérant seulement deux termes on a $\frac{2}{3}$, c'est trop peu de $\frac{1}{12}$. Trois termes font $\frac{7}{9}$, c'est trop de $\frac{1}{36}$. Quatre termes font $\frac{20}{27}$, c'est trop peu de $\frac{1}{108}$, & ainsi de suite.

302.

La fraction $\frac{1}{1+a}$ peut se résoudre encore d'une autre maniere; savoir en divisant 1 par $a+1$, comme il suit:

$$a+1)\ 1\ \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}\right.$$

$$1+\frac{1}{a}$$

$$-\frac{1}{a}$$

$$-\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}$$

$$+\frac{1}{aa}$$

$$+\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}$$

$$-\frac{1}{a^3}$$

$$-\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}$$

$$+\frac{1}{a^4}$$

$$+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}$$

$$-\frac{1}{a^5}, \text{ \&c.}$$

Par conséquent notre fraction $\frac{1}{a+1}$ est égale à la suite infinie $\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}$, &c. Qu'on fasse $a=1$, on aura la

série $1-1+1-1+1-1$, &c. $=\frac{1}{2}$, comme ci-dessus. Et si l'on suppose $a=2$, on aura la série $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}$ &c. $=\frac{1}{3}$.

303.

C'est d'une maniere semblable qu'on pourra résoudre généralement en une suite infinie la fraction $\frac{c}{a+b}$, on aura

$$a+b)\ c\ \left(\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4}\right., \text{ \&c.}$$

$$c+\frac{bc}{a}$$

$$-\frac{bc}{a}$$

$$-\frac{bc}{a}-\frac{bbc}{aa}$$

$$+\frac{bbc}{aa}$$

$$+\frac{bbc}{aa}+\frac{b^3c}{a^3}$$

$$-\frac{b^3c}{a^3}$$

$$-\frac{b^3c}{a^3}-\frac{b^4c}{a^4}$$

$$+\frac{b^4c}{a^4};$$

d'où l'on voit qu'on peut comparer $\frac{c}{a+b}$ avec la série $\frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4}$ &c. jusqu'à l'infini.

Soit $a=2$, $b=4$, $c=3$, nous aurons $\frac{c}{a+b} = \frac{3}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 3 + 6 - 12$, &c.

Soit $a=10$, $b=1$ & $c=11$, nous avons $\frac{c}{a+b} = \frac{11}{10+1} = 1 = \frac{11}{10} - \frac{11}{100} + \frac{11}{1000} - \frac{11}{10000}$ &c.

Si l'on ne considere qu'un seul terme de cette suite, on a $\frac{11}{10}$, ce qui est trop de $\frac{1}{10}$; si on prend deux termes, on a $\frac{99}{100}$, c'est trop peu de $\frac{1}{100}$; si on prend trois termes, on a $\frac{1001}{1000}$, c'est trop de $\frac{1}{1000}$, &c.

304.

Quand il y a plus de deux termes dans le diviseur, on peut également continuer la division jusqu'à l'infini, de la même maniere.

C'est ainsi que si on proposoit la fraction $\frac{1}{1-a+aa}$, la suite infinie à laquelle elle est égale, se trouveroit comme il suit:

$$\begin{array}{l}
1-a+aa)\ 1 \quad (1+a-a^3-a^4+a^6+a^7, \text{ \&c.} \\
\quad 1-a+aa \\
\hline
\quad +a-aa \\
\quad +a-aa+a^3 \\
\hline
\qquad -a^3 \\
\qquad -a^3+a^4-a^5 \\
\hline
\qquad\quad -a^4+a^5 \\
\qquad\quad -a^4+a^5-a^6 \\
\hline
\qquad\qquad +a^6 \\
\qquad\qquad +a^6-a^7+a^8 \\
\hline
\qquad\qquad\quad +a^7-a^8 \\
\qquad\qquad\quad +a^7-a^8+a^9 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad -a^9.
\end{array}$$

Nous avons donc l'équation $\frac{1}{1-a+aa} = 1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 - a^9 - a^{10}$, &c. sans fin. Si nous faisons ici $a=1$, nous avons $1 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1$, &c. laquelle série contient deux fois la série trouvée plus haut $1 - 1 + 1 - 1 + 1$, &c. or comme nous avons trouvé celle-ci $= \frac{1}{2}$, il n'est pas étonnant que nous trouvions $\frac{2}{2}$ ou 1 pour la valeur de celle que nous venons de déterminer.

Qu'on fasse $a=\frac{1}{2}$, on aura l'équation $\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\frac{1}{512}$, &c.

Qu'on suppose $a=\frac{1}{3}$, on aura l'équation $\frac{1}{\frac{7}{9}}=\frac{9}{7}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\frac{1}{729}$, &c. Si on prend les quatre premiers termes de cette suite, on a $\frac{104}{81}$, qui n'est que de $\frac{1}{567}$ moins que $\frac{9}{7}$.

Supposons encore $a=\frac{2}{3}$, nous aurons $\frac{1}{\frac{7}{9}}=\frac{9}{7}=1+\frac{2}{3}-\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\frac{64}{729}$ &c. il faut donc que cette suite soit égale à la précédente; & soustrayant l'une de l'autre, il faut que $0=\frac{1}{3}-\frac{7}{27}-\frac{15}{81}+\frac{63}{729}$ &c. Ces quatre termes ajoutés ensemble font $-\frac{2}{81}$.

305.

La méthode que nous avons exposée sert à résoudre généralement toutes les fractions en suites infinies, & par là elle est souvent

de la plus grande utilité. De plus il est très-remarquable d'ailleurs qu'une série infinie, quoiqu'elle ne cesse jamais, puisse avoir une valeur déterminée. Aussi a-t-on tiré de ce fonds les inventions les plus importantes, & cette matiere mérite d'autant plus, qu'on l'étudie avec toute l'attention possible.

CHAPITRE VI.

Des Quarrés des Quantités complexes.

306.

QUAND il s'agit de trouver le quarré d'une grandeur complexe, on n'a qu'à la multiplier par elle-même, le produit sera le quarré qu'on cherche.

Par exemple, le quarré de $a+b$ se trouve de la maniere suivante:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline aa+ab \\ +ab+bb \\ \hline aa+2ab+bb. \end{array}$$

307.

Ainsi quand la racine consiste en deux termes ajoutés ensemble, comme $a+b$, le quarré renferme, 1°. les quarrés de l'un & de l'autre terme, savoir aa & bb; 2°. le double du produit des deux, savoir $2ab$. De sorte que la somme $aa+2ab+bb$ est le quarré de $a+b$. Soit, par exemple, $a=10$ & $b=3$, c'est-à-dire qu'il soit question de trouver le quarré de 13, on aura $100+60+9$ ou 169.

308.

On trouvera facilement, par le secours de cette formule, les quarrés d'assez grands nombres, en les partageant en deux parties. Pour trouver, par exemple, le quarré de 57, on considérera que ce nombre est $=50+7$; d'où l'on conclut que son quarré est $=2500+700+49=3249$.

309.

On voit aussi par là que le quarré de $a+1$ sera $aa+2a+1$: or puisque le quarré de

de a est aa, on trouve donc le quarré de $a+1$ en ajoutant à celui-là $2a+1$; & il faut remarquer que ce $2a+1$ est la somme des deux racines a & $a+1$.

Ainsi comme le quarré de 10 est 100, celui de 11 sera $100+21$. Le quarré de 57 étant 3249, celui de 58 est $3249+115 =3364$. Le quarré de $59=3364+117 =3481$; le quarré de $60=3481+119 =3600$, &c.

310.

Le quarré d'une quantité complexe, comme $a+b$, s'indique de cette façon: $(a+b)^2$. On a donc $(a+b)^2=aa+2ab+bb$, d'où l'on déduit les équations suivantes:

$(a+1)^2=aa+2a+1$; $(a+2)^2=aa+4a+4$; $(a+3)^2=aa+6a+9$; $(a+4)^2=aa+8a+16$; &c.

311.

Si la racine est $a-b$, le quarré en est $aa-2ab+bb$, qui renferme par conséquent

aussi le quarré des deux termes, mais en sorte qu'il faut en ôter le double du produit de ces deux termes.

Soit, par exemple, $a=10$ & $b=1$, le quarré de 9 se trouvera $=100-20+1=81$.

312.

Puisque nous avons l'équation $(a-b)^2=aa-2ab+bb$, nous aurons $(a-1)^2=aa-2a+1$. Le quarré de $a-1$ se trouve donc en soustrayant de aa la somme des deux racines a & $a-1$, savoir $2a-1$. Soit, par exemple, $a=50$, on a $aa=2500$ & $a-1=49$; donc $49^2=2500-99=2401$.

313.

Ce que nous avons dit peut aussi se confirmer & s'éclaircir par des fractions. Car si l'on prend pour racine $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$ (ce qui fait 1) le quarré sera:

$$\frac{9}{25}+\frac{4}{25}+\frac{12}{25}=\frac{25}{25},$$ c'est-à-dire 1.

De plus le quarré de $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ (ou de $\frac{1}{6}$) sera $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{1}{36}$.

314.

Lorsque la racine est d'un plus grand nombre de termes, la méthode de déterminer le quarré est la même. Voici, par exemple, comment on trouve le quarré de $a+b+c$:

$$\begin{array}{llllll} a+b & +c & & & & \\ a+b & +c & & & & \\ \hline aa+ab & +ac & & +bc & & \\ \quad +ab & +ac & +bb & +bc & +cc & \\ \hline aa+2ab & +2ac & +bb & +2bc & +cc; & \end{array}$$

on voit qu'il renferme d'abord le quarré de chaque terme de la racine, & outre cela les doubles produits de ces termes multipliés deux à deux.

315.

Pour éclaircir ceci par un exemple, partageons le nombre 256 en trois parties,

200+50+6 ; son quarré sera donc composé des parties suivantes :

40000	256
2500	256
36	1536
20000	1280
2400	512
600	65536
65536	

65536, ce qui est évidemment égal au produit 256.256.

316.

Quand quelques termes de la racine sont négatifs, le quarré se trouve encore par la même regle ; mais il faut faire attention quels signes on doit donner aux doubles produits. Ainsi le quarré de $a-b-c$ étant $aa+bb+cc-2ab-2ac+2bc$, si l'on représentoit donc le nombre 256 par 300 —40—4, on auroit

Parties positives.	*Parties négatives.*
+90000	—24000
1600	2400
320	—26400
16	
+91936	
—26400	

65536, quarré de 256 comme cidessus.

CHAPITRE VII.

De l'extraction des Racines appliquée aux Quantités complexes.

317.

Si nous voulons donner une regle sure pour cette opération, il nous faut considérer attentivement le quarré de la racine $a+b$, qui est $aa+2ab+bb$, afin de voir comment on peut réciproquement parvenir à trouver la racine d'un quarré donné. Faisons donc les réflexions qui suivent.

318.

D'abord comme le quarré $aa+2ab+bb$ eſt compoſé de pluſieurs termes, il eſt certain que la racine auſſi renfermera plus d'un terme; & que ſi l'on écrit le quarré de maniere que les puiſſances d'une des lettres, comme de a, aillent toujours en diminuant, le premier terme ſera le quarré du premier terme de la racine. Et puiſque dans notre cas. le premier terme du quarré eſt aa, il faut que le premier terme de la racine ſoit a.

319.

Ayant donc trouvé le premier terme de la racine, c'eſt-à-dire a, on conſidérera le reſte du quarré, ſavoir $2ab+bb$, pour voir ſi on pourra en tirer la ſeconde partie de la racine, qui eſt b. Nous remarquerons ici que ce reſte $2ab+bb$ peut être repréſenté par ce produit-ci, $(2a+b)b$. Or ce reſte ayant donc deux facteurs, $2a+b$ & b, il

eſt clair qu'on trouvera ce dernier b, qui eſt la ſeconde partie de la racine, en diviſant le reſte $2ab+bb$ par $2a+b$.

320.

C'eſt donc le quotient de la diviſion du reſte ſuſdit par $2a+b$, qui eſt le ſecond terme cherché de la racine. Or remarquons dans cette diviſion que $2a$ eſt le double du premier terme a de cette racine, lequel eſt déjà déterminé. Ainſi, quoique le ſecond terme ſoit encore inconnu, & qu'il faille juſqu'à préſent laiſſer ſa place vide, nous pouvons néanmoins entreprendre la diviſion, puiſqu'on n'y regarde qu'au premier terme $2a$. Mais auſſi-tôt qu'on aura trouvé le quotient, qui eſt ici b, il faudra le mettre à la place vide, & rendre de cette façon la diviſion complete.

321.

Le calcul donc par lequel on trouve la racine du quarré $aa+2ab+bb$, peut ſe repréſenter de cette maniere:

$$\begin{array}{l|l} & aa + 2ab + bb \;(a + b \\ & aa \\ \hline 2a + b & + 2ab + bb \\ & + 2ab + bb \\ \hline & 0. \end{array}$$

322.

On pourra de la même maniere trouver la racine quarrée d'autres formules composées, pourvu qu'elles soient des quarrés; les exemples suivans le feront voir :

$$\begin{array}{l|l} & aa + 6ab + 9bb \;(a + 3b \\ & aa \\ \hline 2a + 3b & + 6ab + 9bb \\ & + 6ab + 9bb \\ \hline & 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & 4aa - 4ab + bb \;(2a - b \\ & 4aa \\ \hline 4a - b & - 4ab + bb \\ & - 4ab + bb \\ \hline & 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & 9pp + 24pq + 16qq \;(3p + 4q \\ & 9pp \\ \hline 6p + 4q & + 24pq + 16qq \\ & + 24pq + 16qq \\ \hline & 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & 25xx - 60x + 36 \;(5x - 6 \\ & 25xx \\ \hline 10x - 6 & - 60x + 36 \\ & - 60x + 36 \\ \hline & 0. \end{array}$$

323.

Quand après la division il reste un résidu, c'est signe que la racine est composée de plus de deux termes. Ce qu'on fait alors, c'est de regarder les deux termes déjà trouvés comme faisant la premiere partie, & de tirer du résidu la seconde partie, de la même maniere qu'on avoit trouvé le second terme de la racine. Les exemples suivans rendront ce procédé plus clair.

$$aa + 2ab - 2ac - 2bc + bb + cc \; (a + b - c$$

$$aa$$

$$2a + b \;\Big|\; + 2ab - 2ac - 2bc + bb + cc$$
$$ \;\Big|\; + 2ab \qquad\qquad\quad + bb$$

$$2a + 2b - c \;\Big|\; - 2ac - 2bc + cc$$
$$ \;\Big|\; - 2ac - 2bc + cc.$$

$$a^4 + 2a^3 + 3aa + 2a + 1 \; (aa + a + 1$$

$$a^4$$

$$2aa + a \;\Big|\; + 2a^3 + 3aa$$
$$ \;\Big|\; + 2a^3 + aa$$

$$2aa + 2a + 1 \;\Big|\; + 2aa + 2a + 1$$
$$ \;\Big|\; + 2aa + 2a + 1.$$

$$a^4 - 4a^3b + 8ab^3 + 4b^4 \; (aa - 2ab - 2bb$$

$$a^4$$

$$2aa - 2ab \;\Big|\; - 4a^3b + 8ab^3$$
$$ \;\Big|\; - 4a^3b + 4aabb$$

$$2aa - 4ab - 2bb \;\Big|\; - 4aabb + 8ab^3 + 4b^4$$
$$ \;\Big|\; - 4aabb + 8ab^3 + 4b^4.$$

$$(a^3 - 3aab + 3abb - b^3)$$

$$a^6 - 6a^5b + 15a^4bb - 20a^3b^3 + 15aab^4 - 6ab^5 + b^6$$

$$a^6$$

$$2a^3 - 3aab \;\Big|\; - 6a^5b + 15a^4bb$$
$$ \;\Big|\; - 6a^5b + 9a^4bb$$

$$2a^3 - 6aab + 3abb \;\Big|\; + 6a^4bb - 20a^3b^3 + 15aab^4$$
$$ \;\Big|\; + 6a^4bb - 18a^3b^3 + 9aab^4$$

$$2a^3 - 6aab + 6abb - b^3 \;\Big|\; - 2a^3b^3 + 6aab^4 - 6ab^5 + b^6$$
$$ \;\Big|\; - 2a^3b^3 + 6aab^4 - 6ab^5 + b^6$$

$$0.$$

324.

On déduit facilement de la regle que nous venons d'exposer, la méthode qu'enseignent les livres d'Arithmétique pour l'extraction de la racine quarrée. Voici quelques exemples en nombres :

```
     5'29|23        17'64|42        23'04|48
     4   |          16   |          16   |
  43|129         82|164          88|704
    |129           |164            |704
      o.              o.              o.
-------------------------------------------
       40'96|64            96'04|98
       36   |              81   |
   124|496             188|1504
      |496                |1504
        o.                  o.
-------------------------------------------
     1'56'25|125         99'80'01|999
     1      |            81      |
   22|56             189|1880
     |44                |1701
  245|1225          1989|17901
     |1225              |17901
       o.                 o.
```


325.

Mais lorsqu'après l'opération entiere il reste un résidu, c'est une marque que le nombre proposé n'est pas un quarré, & par conséquent qu'on ne peut pas en assigner la racine. On se sert dans ces cas du signe radical que nous avons déjà employé plus haut ; on écrit ce signe devant la formule, & on met la formule elle-même entre deux crochets, ou sous un trait. C'est ainsi que la racine quarrée de $aa+bb$ s'indique par $\sqrt{(aa+bb)}$, ou par $\sqrt{aa+bb}$; & que $\sqrt{(1-xx)}$, ou $\sqrt{1-xx}$, exprime la racine quarrée de $1-xx$. On peut aussi, au lieu de ce signe radical, faire usage de l'exposant rompu $\frac{1}{2}$, & indiquer, par exemple, la racine quarrée de $aa+bb$ par $(aa+bb)^{\frac{1}{2}}$, ou par $\overline{aa+bb}^{\frac{1}{2}}$.

CHAPITRE VIII.

Du Calcul des Quantités irrationnelles.

326.

LORSQU'IL s'agit d'ajouter ensemble deux ou plusieurs formules irrationnelles, cela se fait, suivant la maniere prescrite plus haut, en écrivant de suite tous les termes chacun avec le signe qui lui est propre. Et ce qu'il faut remarquer quant aux façons d'abréger, c'est que, par exemple, au lieu de $\sqrt{a}+\sqrt{a}$ on écrit $2\sqrt{a}$, & que $\sqrt{a}-\sqrt{a}$ fait 0, ces deux termes se détruisant l'un l'autre. C'est ainsi que les formules $3+\sqrt{2}$ & $1+\sqrt{2}$ ajoutées ensemble, font $4+2\sqrt{2}$ ou $4+\sqrt{8}$; que la somme de $5+\sqrt{3}$ & de $4-\sqrt{3}$, est 9; & que celle de $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$, & de $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, est $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

327.

La soustraction se fait de même très-facilement, vu qu'on n'a besoin que d'ajouter ensemble les nombres proposés, en prenant le contraire des signes qui les affectent: l'exemple suivant le fera voir; nous soustrairons le nombre inférieur du supérieur.

$$\begin{array}{l} 4-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+4\sqrt{6} \\ 1+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-5\sqrt{5}+6\sqrt{6} \\ \hline 3-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{6}. \end{array}$$

328.

On se rappellera dans la multiplication que $\sqrt{a}$ multiplié par $\sqrt{a}$ fait a; & que si les nombres qui suivent le signe $\sqrt{}$ sont différens, comme a & b, on a $\sqrt{ab}$ pour le produit de $\sqrt{a}$ multiplié par $\sqrt{b}$. Il sera facile après cela de calculer les exemples qui suivent:

$$\begin{array}{ll}
1+\sqrt{2} & 4+2\sqrt{2} \\
\underline{1+\sqrt{2}} & \underline{2-\sqrt{2}} \\
1+\sqrt{2} & 8+4\sqrt{2} \\
\underline{\quad+\sqrt{2}+2} & \underline{\quad-4\sqrt{2}-4} \\
1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}. & 8-4 \quad =4.
\end{array}$$

329.

Ce que nous avons dit regarde aussi les quantités imaginaires. On observera seulement encore que $\sqrt{-a}$ multiplié par $\sqrt{-a}$ fait $-a$.

S'il s'agissoit de trouver le cube de $-1+\sqrt{-3}$, on prendroit le quarré de ce nombre, & on multiplieroit ce quarré encore par le même nombre ; voici l'opération :

$$\begin{array}{l}
-1+\sqrt{-3} \\
\underline{-1+\sqrt{-3}} \\
+1-\sqrt{-3} \\
\underline{\quad-\sqrt{-3}-3} \\
+1-2\sqrt{-3}-3=-2-2\sqrt{-3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-1+\sqrt{-3}} \\
\qquad\qquad\qquad\quad +2+2\sqrt{-3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\quad-2\sqrt{-3}+6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 2+6 \quad =8.
\end{array}$$

330.

330.

Dans la division des quantités sourdes on n'a besoin que de mettre les quantités proposées en forme de fraction ; celle-ci peut ensuite se changer en une autre expression dont le dénominateur soit rationnel. Car si ce dénominateur est, par exemple, $a+\sqrt{b}$, & qu'on le multiplie de même que le numérateur par $a-\sqrt{b}$, le nouveau dénominateur sera $aa-b$, où il ne se trouve plus de signe radical. Supposons qu'on propose de diviser $3+2\sqrt{2}$ par $1+\sqrt{2}$, nous aurons d'abord $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Multipliant maintenant les deux termes de la fraction par $1-\sqrt{2}$, nous aurons pour le numérateur :

$$\begin{array}{l}
3+2\sqrt{2} \\
\underline{1-\sqrt{2}} \\
3+2\sqrt{2} \\
\underline{\quad-3\sqrt{2}-4} \\
3-\sqrt{2}-4=-\sqrt{2}-1 ;
\end{array}$$

Tome I. R

& pour le dénominateur :

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ \quad -\sqrt{2}-2 \\ \hline 1-2=-1. \end{array}$$

Notre nouvelle fraction est donc $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$; & si nous multiplions encore les deux termes par -1, nous aurons pour le numérateur $+\sqrt{2}+1$, & pour le dénominateur $+1$. Or il est facile de se convaincre que $\sqrt{2}+1$ équivaut à la fraction proposée $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; car $\sqrt{2}+1$ étant multiplié par le diviseur $1+\sqrt{2}$

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ \quad +\sqrt{2}+2 \\ \hline \end{array}$$

on a $1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}$.

Autre exemple : $8-5\sqrt{2}$ divisé par $3-2\sqrt{2}$ fait $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$. Multipliant ces deux termes de la fraction par $3+2\sqrt{2}$, on a pour le numérateur

$$\begin{array}{l} 8-5\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} \\ \hline 24-15\sqrt{2} \\ \quad +16\sqrt{2}-20 \\ \hline 24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2}; \end{array}$$

& pour le dénominateur

$$\begin{array}{l} 3-2\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} \\ \hline 9-6\sqrt{2} \\ \quad +6\sqrt{2}-4.2 \\ \hline 9-8=+1. \end{array}$$

Par conséquent le quotient seroit $4+\sqrt{2}$.

En voici la preuve :

$$\begin{array}{l} 4+\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} \\ \hline 12+3\sqrt{2} \\ \quad -8\sqrt{2}-4 \\ \hline 12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2}. \end{array}$$

331.

C'est de la même maniere qu'on peut transformer de ces fractions en d'autres, dont le dénominateur soit rationnel. Si l'on a, par exemple, la fraction $\frac{1}{5-2\sqrt{6}}$, & que l'on en multiplie le numérateur & le dénominateur par $5+2\sqrt{6}$, on la transformera en celle-ci, $\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5+2\sqrt{6}$.

De même la fraction $\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$ prend cette forme, $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$. Et $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ devient $=\frac{11+2\sqrt{30}}{1}=11+2\sqrt{30}$.

332.

On pourra de la même maniere faire disparoître peu à peu les radicaux du dénominateur, quand il contient plusieurs termes. Soit proposée la fraction $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, on multipliera d'abord ces deux termes par $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$; on aura $\frac{+\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$. Multipliant ensuite encore ce numérateur & ce dénominateur par $5+2\sqrt{6}$, on a $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$.

CHAPITRE IX.

Des Cubes & de l'extraction des Racines cubiques.

333.

POUR trouver le cube d'une racine $a+b$, on ne fait que multiplier son quarré $aa+2ab+bb$ encore une fois par $a+b$,

$$\begin{array}{l} aa+2ab+bb \\ a+b \\ \hline a^3+2aab+abb \\ \quad +aab+2abb+b^3 \\ \hline \end{array}$$

le cube sera $=a^3+3aab+3abb+b^3$.

Il renferme donc les cubes des deux parties de la racine, & outre cela encore $3aab+3abb$, quantité qui équivaut à $(3ab).(a+b)$, c'est-à-dire, au triple du produit des deux parties a & b, multiplié par leur somme.

334.

Ainsi toutes les fois qu'une racine est composée de deux termes, il est facile d'en trouver le cube d'après cette regle. Par exemple, le nombre $5=3+2$; son cube est donc $27+8+18.5=125$.

Que $7+3=10$ soit la racine; le cube sera $343+27+63.10=1000$.

Pour trouver le cube de 36, on supposera la racine $36=30+6$, & on aura pour le cube cherché, $27000+216+540.36=46656$.

335.

Mais si c'est au contraire le cube qui est donné, savoir $a^3+3aab+3abb+b^3$, & qu'il s'agisse d'en trouver la racine, on fera préalablement les remarques qui suivent.

D'abord si le cube est ordonné suivant les puissances d'une lettre, on reconnoît facilement par le premier terme a^3, le premier terme a de la racine, puisque le cube en est a^3; si l'on soustrait donc ce cube du cube proposé, on obtient le reste, $3aab+3abb+b^3$, lequel doit fournir le second terme de la racine.

336.

Mais comme nous savons d'avance que ce second terme est $+b$, il s'agit principalement de voir comment il se déduit du reste susdit. Or ce reste peut être exprimé par deux facteurs, comme $(3aa+3ab+bb).(b)$; si on le divise donc par $3aa+3ab+bb$, c'est le moyen d'obtenir la seconde partie de la racine $+b$, qu'on demande.

337.

Mais comme ce second terme ne doit pas être supposé connu, le diviseur est inconnu pareillement; cependant nous avons

le premier terme de ce diviseur, & cela suffit; car il est $3aa$, c'est-à-dire, le triple du quarré du premier terme déjà trouvé, & moyennant cela il n'est pas difficile de trouver aussi l'autre partie b, & de compléter ensuite le diviseur avant qu'on acheve la division. Il faudra pour cet effet joindre à $3aa$ le triple du produit des deux termes ou $3ab$, & bb ou le quarré du second terme de la racine.

338.

Appliquons ce que nous venons de dire à deux exemples pour d'autres cubes donnés.

I.) $a^3 + 12aa + 48a + 64$ $(a + 4$

a^3

$3aa + 12a + 16$ | $+ 12aa + 48a + 64$

$+ 12aa + 48a + 64$

o.

II.) $a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1$ $(aa - 2a + 1)$

a^6

$3a^4 - 6a^3 + 4aa$ | $-6a^5 + 15a^4 - 20a^3$

$-6a^5 + 12a^4 - 8a^3$

$3a^4 - 12a^3 + 12aa + 3a^2 - 6a + 1$ | $+ 3a^4 - 12a^3 + 15aa - 6a + 1$

$+ 3a^4 - 12a^3 + 15aa - 6a + 1$

o.

339.

L'explication que nous avons donnée fait le fondement de la regle ordinaire pour l'extraction des racines cubiques des nombres. Voici, par exemple, le plan de l'opération pour le nombre 2197:

	2'197 (10+3=13
	1 000
300	1 197
90	
9	
399	1 197
	0.

Faisons encore le calcul de l'extraction de la racine cubique de 34965783:

	34 965 783 (300+20+7
	27 000 000
270000	7 965 783
18000	
400	
288400	5 768 000
307200	2 197 783
6720	
49	
313969	2 197 783
	0.

CHAPITRE X.

Des Puissances plus hautes des Quantités complexes.

340.

APRÈS les quarrés & les cubes viennent des puissances plus hautes, ou d'un plus grand nombre de degrés. On les indique par des exposans de la maniere que nous avons expliquée plus haut; il faut seulement observer, quand la racine est complexe, de l'enfermer entre deux parentheses. Ainsi $(a+b)^5$ signifie que $a+b$ est élevé au cinquieme degré, & $(a-b)^6$ indique la sixieme puissance de $a-b$. Nous ferons voir dans ce chapitre le développement de ces puissances.

341.

Soit donc $a+b$ la racine ou la premiere puissance, les puissances plus hautes se trouveront par la multiplication de la maniere qui suit:

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$a+b$$
$$\overline{aa+ab}$$
$$+ab\ +bb.$$
$$\overline{(a+b)^2 = aa+2ab+bb.}$$
$$a+b$$
$$\overline{a^3+2aab+abb}$$
$$+aab+2abb+b^3.$$
$$\overline{(a+b)^3 = a^3+3aab+3abb+b^3}$$
$$a+b$$
$$\overline{a^4+3a^3b+3aabb+ab^3}$$
$$+a^3b+3aabb+3ab^3+b^4.$$
$$\overline{(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4}$$
$$a+b$$
$$\overline{a^5+4a^4b+6a^3bb+4aab^3+ab^4}$$
$$+a^4b+4a^3bb+6aab^3+4ab^4$$
$$+b^5.$$

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3bb+10aab^3$$
$$+5ab^4+b^5$$
$$a+b$$
$$\overline{a^6+5a^5b+10a^4bb+10a^3b^3}$$
$$+5aab^4+ab^5$$
$$+a^5b+5a^4bb+10a^3b^3$$
$$+10a^2b^4+5ab^5+b^6.$$
$$\overline{(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4bb+20a^3b^3}$$
$$+15aab^4+6ab^5+b^6,\ \&c.$$

342.

On trouve de même les puiſſances de la racine $a-b$, & on va voir qu'elles ne different des précédentes, qu'en ce que les termes 2e, 4e, 6e, &c. ſont affectés du ſigne *moins :*

$$(a-b)^1 = a-b$$
$$a-b$$
$$\overline{aa-ab}$$
$$-ab+bb.$$

$$(a-b)^2 = aa - 2ab + bb$$
$$a - b$$
$$\overline{a^3 - 2aab + abb}$$
$$- aab + 2abb - b^3.$$
$$\overline{(a-b)^3 = a^3 - 3aab + 3abb - b^3}$$
$$a - b$$
$$\overline{a^4 - 3a^3b + 3aabb - ab^3}$$
$$- a^3b + 3aabb - 3ab^3 + b^4.$$
$$\overline{(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6aabb - 4ab^3 + b^4}$$
$$a - b$$
$$\overline{a^5 - 4a^4b + 6a^3bb - 4aab^3 + ab^4}$$
$$- a^4b + 4a^3bb - 6aab^3 + 4ab^4 - b^5.$$
$$\overline{(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3bb - 10aab^3 + 5ab^4 - b^5}$$
$$a - b$$
$$\overline{a^6 - 5a^5b + 10a^4bb - 10a^3b^3 + 5aab^4 - ab^5}$$
$$- a^5b + 5a^4bb - 10a^3b^3 + 10aab^4 - 5ab^5 + b^6.$$

$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4bb - 20a^3b^3 + 15aab^4 - 6ab^5 + b^6, \&c.$$

On voit ici que toutes les puiſſances impaires de b reçoivent le ſigne —, tandis que les puiſſances paires gardent le ſigne +. La raiſon en eſt évidente ; car puiſque dans la racine ſe trouve $-b$, les puiſſances de cette lettre monteront de cette maniere : $-b$, $+bb$, $-b^3$, $+b^4$, $-b^5$, $+b^6$, &c. & il eſt clair par là que les puiſſances paires doivent être affectées du ſigne +, & les impaires du ſigne contraire —.

343.

Il ſe préſente ici une queſtion importante, c'eſt comment, ſans continuer le calcul de la même maniere dans toutes les formes, on pourroit trouver toutes les puiſſances tant de $a+b$, que de $a-b$. Nous remarquerons avant toutes choſes, que ſi on eſt en état d'aſſigner toutes les puiſſances de $a+b$, celles de $a-b$ ſont toutes trouvées, puiſqu'on n'a qu'à changer les ſignes des

termes pairs, c'est-à-dire du second, du quatrieme, du sixieme terme, &c. Le principal revient donc à établir une regle, d'après laquelle toute puissance de $a+b$, quelque haute qu'elle soit, puisse être déterminée sans qu'il soit nécessaire de faire le calcul pour toutes celles qui la précedent.

344.

Or observons que si dans les puissances déterminées ci-dessus on fait abstraction des nombres qui précedent chaque terme, & qu'on nomme les *coefficiens*, il regne dans tous ces termes un ordre remarquable; d'abord on voit le premier terme a de la racine élevé à la puissance même qu'on demande; dans les termes suivans les puissances de a diminuent continuellement de l'unité, les puissances de b augmentent d'autant; de sorte que la somme des exposans de a & de b est toujours la même & égale au nombre du degré demandé, & à la fin se trouve le terme b seul élevé à la même puissance. Si l'on demande donc la dixieme puissance de $a+b$, on est sûr que les termes dégagés des coefficiens se suivront dans l'ordre que voici: a^{10}, $a^9 b$, $a^8 bb$, $a^7 b^3$, $a^6 b^4$, $a^5 b^5$, $a^4 b^6$, $a^3 b^7$, $a^2 b^8$, ab^9, b^{10}.

345.

Il reste donc à faire voir comment on doit déterminer les coefficiens qui appartiennent à ces termes, ou les nombres par lesquels il faut multiplier ces termes. Or quant au premier terme, son coefficient est toujours l'unité; & quant au second, son coefficient est constamment l'exposant même de la puissance; mais pour ce qui regarde les autres termes, il n'est pas si facile d'observer un ordre dans leurs coefficiens. Cependant si l'on continue encore ces coefficiens, on ne laissera pas d'appercevoir aussi une loi, moyennant laquelle on pourra aller aussi loin qu'on voudra. C'est ce que la table suivante fera voir.

I. puiff. coefficiens 1,1
II. ——— 1,2,1
III. ——— 1,3,3,1
IV. ——— 1,4,6,4,1
V. ——— 1,5,10,10,5,1
VI. —— 1,6,15,20,15,6,1
VII. — 1,7,21,35,35,21,7,1
VIII. — 1,8,28,56,70,56,28,8,1
IX. 1,9,36,84,126,126,84,36,9,1
X. 1,10,45,120,210,252,210,120,45,10,1
&c.

On voit donc que la dixieme puiffance de $a+b$ fera:
$a^{10}+10a^9b+45a^8bb+120a^7b^3+210a^6b^4$
$+252a^5b^5+210a^4b^6+120a^3b^7+45a^2b^8$
$+10ab^9+b^{10}$.

346.

Il faut remarquer à l'égard de ces coefficiens, que pour chaque puiffance leur fomme doit être égale au nombre 2 élevé à la même puiffance. Qu'on faffe $a=1$ & $b=1$, chaque terme, abftraction faite

du coefficient, fera $=1$; par conféquent ce fera fimplement la fomme des coefficiens qui indiquera la valeur de la puiffance; cette fomme dans l'exemple précédent eft 1024, & en effet $(1+1)^{10}$ $=2^{10}=1024$.

Il en eft de même des autres puiffances; on a pour la

I.e $1+1=2=2^1$,
II.e $1+2+1=4=2^2$,
III.e $1+3+3+1=8=2^3$,
IV.e $1+4+6+4+1=16=2^4$,
V.e $1+5+10+10+5+1=32=2^5$,
VI.e $1+6+15+20+15+6+1=64$ $=2^6$,
VII.e $1+7+21+35+35+21+7+1$ $=128=2^7$, &c.

347.

Une autre remarque à faire au fujet de ces coefficiens, c'eft qu'ils croiffent depuis le commencement jufqu'au milieu, & qu'enfuite ils décroiffent dans le même ordre.

Dans les puiſſances paires le plus grand coefficient eſt exactement au milieu ; mais dans les puiſſances impaires, on voit deux coefficiens égaux & plus grands que les autres qui ſe trouvent au milieu, & qui appartiennent aux termes moyens.

Quant à l'ordre de ces coefficiens, il mérite une attention particuliere ; car c'eſt dans cet ordre même qu'on trouve les moyens de les déterminer pour une puiſſance quelconque, ſans paſſer par les précédentes. Nous allons en donner la méthode, en en réſervant cependant la démonſtration pour le chapitre ſuivant.

348.

Pour trouver les coefficiens d'une puiſſance propoſée, par exemple, la ſeptieme, on écrira les fractions qui ſuivent l'une après l'autre :

$$\frac{7}{1},\ \frac{6}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{6},\ \frac{1}{7}.$$

On voit dans cet arrangement que les numérateurs commencent par l'expoſant de

la puiſſance qu'on demande, & qu'ils diminuent ſucceſſivement de l'unité pendant que les dénominateurs ſe ſuivent dans l'ordre naturel des nombres, 1, 2, 3, 4, &c. Or le premier coefficient étant toujours 1, la premiere fraction donne le ſecond coefficient. Le produit des deux premieres fractions, multipliées l'une par l'autre, repréſente le troiſieme coefficient. Le produit des trois premieres fractions repréſente le quatrieme coefficient, & ainſi de ſuite.

Ainſi le premier coefficient $= 1$; le ſecond $= \frac{7}{1} = 7$; le troiſieme $= \frac{7}{1}.\frac{6}{2} = 21$; le quatrieme $= \frac{7}{1}.\frac{6}{2}.\frac{5}{3} = 35$; le cinquieme $= \frac{7}{1}.\frac{6}{2}.\frac{5}{3}.\frac{4}{4} = 35$; le ſixieme $= \frac{7}{1}.\frac{6}{2}.\frac{5}{3}.\frac{4}{4}.\frac{3}{5}$ $= 21$; le ſeptieme $= 21.\frac{2}{6} = 7$; le huitieme $= 7.\frac{1}{7} = 1$.

349.

On a donc pour la ſeconde puiſſance les deux fractions $\frac{2}{1}.\frac{1}{2}$, d'où il s'enſuit que le premier coefficient $= 1$; le ſecond $= \frac{2}{1}$ $= 2$; & le troiſieme $= 2.\frac{1}{2} = 1$.

La troisieme puissance fournit les fractions $\frac{3}{1}.\frac{2}{2}.\frac{1}{3}$; donc le premier coefficient $=1$; le second $=\frac{3}{1}=3$; le troisieme $=3.\frac{2}{2}=3$; le quatrieme $=\frac{3}{1}.\frac{2}{2}.\frac{1}{3}=1$.

On a pour la quatrieme puissance ces fractions-ci, $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}$; par conséquent le premier coefficient $=1$; le second $\frac{4}{1}=4$; le troisieme $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}=6$; le quatrieme $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}=4$; & le cinquieme $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}=1$.

350.

Cette regle nous procure donc évidemment l'avantage de n'avoir pas besoin de connoître les coefficiens précédens, & de trouver au contraire sur le champ, pour une puissance quelconque, les coefficiens qui lui sont propres.

Ainsi pour la dixieme puissance on écrira les fractions $\frac{10}{1}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{10}$, moyennant quoi l'on trouve

le premier coefficient $=1$,
le second $=\frac{10}{1}=10$,

le troisieme $=10.\frac{9}{2}=45$,
le quatrieme $=45.\frac{8}{3}=120$,
le cinquieme $=120.\frac{7}{4}=210$,
le sixieme $=210.\frac{6}{5}=252$,
le septieme $=252.\frac{5}{6}=210$,
le huitieme $=210.\frac{4}{7}=120$,
le neuvieme $=120.\frac{3}{8}=45$,
le dixieme $=45.\frac{2}{9}=10$,
le onzieme $=10.\frac{1}{10}=1$.

351.

On peut aussi écrire ces fractions telles qu'elles sont, sans en calculer la valeur, & il est facile de cette maniere d'écrire une puissance quelconque de $a+b$, quelque haute qu'elle soit. C'est ainsi que la centieme puissance de $a+b$ sera $(a+b)^{100} = a^{100}+\frac{100}{1}.a^{99}b+\frac{100.99}{1.2}.a^{98}bb+\frac{100.99.98}{1.2.3}a^{97}b^3+\frac{100.99.98.97}{1.2.3.4}a^{96}b^4+$, &c. d'où il est aisé de conclure quelle sera la loi des termes suivans.

CHAPITRE XI.

De la permutation des Lettres, sur laquelle se fonde la démonstration de la Regle précédente.

352.

Si on remonte à l'origine des coefficiens dont nous venons de nous occuper, on trouvera que chaque terme se présente autant de fois qu'il est possible de transposer les lettres qui composent ce terme; ou bien, pour nous exprimer d'une autre maniere, que le coefficient de chaque terme est égal au nombre des permutations que souffrent les lettres dont ce terme est composé. Dans la seconde puissance, par exemple, le terme *ab* est pris deux fois, c'est-à-dire que son coefficient est 2; & on peut en effet changer doublement l'ordre des lettres qui composent ce terme, puisqu'on peut écrire *ab* & *ba*; le terme *aa* au contraire ne se

présente qu'une fois, parce que l'ordre des lettres ne peut subir aucun changement ou permutation. Dans la troisieme puissance de $a+b$, le terme *aab* peut s'écrire de trois manieres différentes, *aab*, *aba*, *baa*; aussi le coefficient est-il 3. De même dans la quatrieme puissance le terme a^3b ou *aaab*, admet les quatre dispositions différentes, *aaab*, *aaba*, *abaa*, *baaa*; c'est pourquoi son coefficient est 4. Le terme *aabb* souffre six permutations, *aabb*, *abba*, *baba*, *abab*, *bbaa*, *baab*, & son coefficient est 6. Il en est de même dans tous les cas.

353.

En effet si l'on considere que la quatrieme puissance, par exemple, d'une racine quelconque composée même de plus de deux termes, comme $(a+b+c+d)^4$, se trouve en multipliant ces quatre facteurs, I. $a+b+c+d$; II. $a+b+c+d$; III. $a+b+c+d$; IV. $a+b+c+d$; on peut voir aisément que chaque lettre du premier facteur doit

ſe multiplier par chaque lettre du ſecond, enſuite par chaque lettre du troiſieme, & enfin encore par chaque lettre du quatrieme.

Il faut donc non-ſeulement que chaque terme ſoit composé de quatre lettres, mais auſſi qu'il ſe préſente ou qu'il entre dans la ſomme autant de fois que ces lettres peuvent être diſpoſées différemment entr'elles, d'où provient enſuite ſon coefficient.

354.

Il importe donc beaucoup ici de ſavoir de combien de manieres différentes un nombre donné de lettres peuvent être diſpoſées entr'elles. Et il faudra dans cette recherche faire attention ſur-tout ſi les lettres dont il s'agit ſont les mêmes ou diverſes. Quand elles ſont les mêmes, il ne peut y avoir de permutation, & c'eſt auſſi pourquoi les puiſſances ſimples, comme a^2, a^3, a^4, &c. ont toutes l'unité pour coefficient.

355.

Nous ſuppoſerons d'abord toutes les lettres diverſes; & en commençant par le cas le plus ſimple, de deux lettres ou *ab*, nous voyons que ce ſont évidemment deux tranſpoſitions qui peuvent avoir lieu, ſavoir *ab*, *ba*.

Si nous avons trois lettres, *abc*, à conſidérer, nous remarquons que chacune des trois pourroit prendre la premiere place, tandis que les deux autres admettroient deux permutations. Car ſi *a* eſt la premiere lettre, on a les deux diſpoſitions *abc*, *acb*; ſi *b* eſt à la premiere place, on a les diſpoſitions *bac*, *bca*; enfin ſi *c* occupe la premiere place, on a de même deux diſpoſitions, ſavoir *cab*, *cba*. Et par conſéquent le nombre total des diſpoſitions eſt $3.2=6$.

Si on a quatre lettres, *abcd*, chacune peut occuper la premiere place; & dans chacun de ces cas les trois autres peuvent former ſix diſpoſitions différentes, comme

nous venons de voir. Le nombre total des permutations eſt donc 4.6=24=4.3.2.1.

Si on a cinq lettres, *abcde*, chacune des cinq pouvant également ſe trouver la premiere, & les quatre autres ſouffrir vingt-quatre permutations, il s'enſuit que le nombre total des permutations ſera 5.24=120 =5.4.3.2.1.

356.

Quelque grand par conſéquent que ſoit le nombre des lettres, on voit aſſez que, pourvu qu'elles ſoient toutes différentes, il eſt facile de déterminer le nombre de toutes les permutations, & qu'on pourra faire uſage de la table ſuivante:

Nombre des Lettres:		*Nombre des Permutations:*
I.	1	= 1.
II.	2.1	= 2.
III.	3.2.1	= 6.
IV.	4.3.2.1	= 24.
V.	5.4.3.2.1	= 120.
VI.	6.5.4.3.2.1	= 720.
VII.	7.6.5.4.3.2.1	= 5040.
VIII.	8.7.6.5.4.3.2.1	= 40320.
IX.	9.8.7.6.5.4.3.2.1	= 362880.
X.	10.9.8.7.6.5.4.3.2.1	= 3628800.

357.

Mais comme nous l'avons inſinué, les nombres de cette table ne peuvent s'employer que dans les cas où toutes les lettres ſont différentes; car ſi deux ou pluſieurs d'entre elles ſont ſemblables, le nombre des permutations devient beaucoup moindre; & ſi toutes les lettres ſont les mêmes, on n'a qu'une ſeule diſpoſition. Nous allons donc voir comment les nombres de la table doivent être diminués ſuivant le nombre des lettres ſemblables.

358.

Quand deux lettres ſont données, & que ces lettres ſont les mêmes, les deux diſpoſitions ſe réduiſent à une ſeule, & par conſéquent le nombre que nous avions trouvé ci-deſſus ſe réduit à la moitié, c'eſt-à-dire qu'il faut le diviſer par 2. Si on a trois lettres ſemblables, on voit ſix permutations ſe réduire à une ſeule; d'où il ſuit que les nombres de la table doivent être diviſés par $6 = 3.2.1$. Et par une raiſon ſemblable, ſi quatre lettres ſont les mêmes, il faudra diviſer les nombres trouvés par 24 ou par 4.3.2.1 &c.

Il eſt donc facile maintenant de déterminer, par exemple, de combien de permutations les lettres $aaabbc$ ſont ſuſceptibles. Elles ſont au nombre de ſix, & par conſéquent ſi elles étoient toutes différentes, elles admettroient 6.5.4.3.2.1 permutations. Mais puiſque a ſe trouve trois fois dans ces lettres, il faudra diviſer ce nombre de permutations par 3.2.1; & puiſque

b ſe rencontre deux fois, il faudra encore diviſer par 2.1; le nombre des permutations cherché ſera donc $= \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = 5.4.3 = 60$.

359.

Il nous ſera donc facile à préſent de déterminer les coefficiens de tous les termes d'une puiſſance quelconque. Nous en donnerons un exemple ſur la ſeptieme puiſſance $(a+b)^7$.

Le premier terme eſt a^7, qui ne ſe rencontre qu'une fois; & comme tous les autres termes ont chacun ſept lettres, il s'enſuit que le nombre de toutes les permutations pour chaque terme ſeroit 7.6.5.4.3.2.1, ſi toutes les lettres étoient diſſemblables. Mais puiſque dans le ſecond terme a^6b on trouve ſix lettres ſemblables, il faudra diviſer ce produit-là par 6.5.4.3.2.1, d'où il ſuit que le coefficient eſt $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{6.5.4.3.2.1} = \frac{7}{1}$.

Dans le troiſieme terme a^5bb, on trouve cinq fois la même lettre a, & deux fois la

même lettre b ; il faut donc divifer ce nombre d'abord par 5.4.3.2.1, & enfuite encore par 2.1 ; d'où réfulte le coefficient $\frac{7.6.5.4.3.2.1}{5.4.3.2.1.1.2} = \frac{7.6}{1.2}$.

Le quatrieme terme a^4b^3 contient quatre fois la lettre a, & trois fois la lettre b ; par conféquent le nombre total des permutations de fept lettres, doit être divifé en premier lieu par 4.3.2.1, & en fecond lieu par 3.2.1, ou par 1.2.3, & le fecond coefficient devient $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.1.2.3} = \frac{7.6.5}{1.2.3}$.

On trouvera de la même maniere $\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$ pour le coefficient du cinquieme terme, & ainfi des autres ; au moyen de quoi la regle donnée plus haut fe trouve démontrée (*).

(*) Souvent auffi on tire de la théorie des *Combinaifons* les regles qu'on vient de voir pour la détermination des coefficiens des termes de la puiffance d'un binome ; c'eft peut-être avec quelque avantage, parce que tout fe rapporte alors à une feule formule.

Pour indiquer d'abord en paffant la différence qui eft entre les permutations & les combinaifons, remarquons que dans celles-là on demande de combien de manieres différentes, par exemple, les lettres qui compofent une

360.

360.

Ces confidérations nous conduifent encore plus loin, & nous montrent auffi comment on doit trouver toutes les puiffances

certaine formule peuvent changer de place, au lieu que dans les combinaifons on demande combien de fois ces lettres peuvent être prifes ou multipliées enfemble une à une, deux à deux, trois à trois.

Qu'on ait, par exemple, la formule $\underline{abc}$, on a vu que les lettres qui la compofent fouffrent fix permutations, favoir $\underline{abc}$, $\underline{acb}$, $\underline{bac}$, $\underline{bca}$, $\underline{cab}$, $\underline{cba}$. Mais s'il s'agit des combinaifons, je dis que fi on prend ces trois lettres une à une, on a trois combinaifons, favoir $\underline{a}$, $\underline{b}$ & $\underline{c}$. Que fi on les prend deux à deux, on a les trois combinaifons $\underline{ab}$, $\underline{ac}$ & $\underline{bc}$. Enfin, que fi on prend ces trois lettres trois à trois, on a la feule combinaifon $\underline{abc}$.

Or de même qu'on prouve que $\underline{5}$ chofes différentes admettent 1.2.3.4 -- 5 permutations différentes, & que fi de ces $\underline{5}$ chofes il y en a r égales, le nombre des permutations eft $\frac{1.2.3.4 \text{ -- } 5}{1.2.3. \text{ -- } r}$; on prouve auffi que $\underline{5}$ chofes peuvent fe prendre $\underline{r}$ à $\underline{r}$, le nombre $\frac{5.\overline{5-1}.\overline{5-2} \text{ -- } \overline{5-r+1}}{1.2.3 \text{ -- } r}$ de fois, ou que de ces $\underline{5}$ chofes on peut en prendre $\underline{r}$ d'autant de manieres différentes. Cela fait que fi on nomme $\underline{5}$ l'expofant de la puiffance à laquelle on veut élever le

des racines qui sont composées de plus de deux termes (*). Nous en ferons l'application à la troisieme puissance de $a+b+c$, dont les termes doivent être formés de

binome $a+b$, & r l'exposant de la lettre b dans un terme quelconque, c'est toujours cette formule $\frac{5.\overline{5-1}.\overline{5-2}\ldots\overline{5-r+1}}{1.2.3\ldots r}$ qui exprime le coefficient de ce terme. Ainsi dans l'exemple de cet article 359 ou $5=7$, on a pour le troisieme terme a^5bb, l'exposant $r=2$, & par conséquent le coefficient $=\frac{7.6}{1.2}$.

Pour le quatrieme terme on a $r=3$ & le coefficient $=\frac{7.6.5}{1.2.3}$, & ainsi de suite. Ce sont, comme on voit, les mêmes résultats que par les permutations.

On a des traités complets & étendus sur la théorie des combinaisons, qu'on doit à Messieurs *Frenicle*, de *Monmort*, *Jacques Bernoulli*, &c. Ces deux derniers ont approfondi cette théorie, relativement à son grand usage, dans le calcul des probabilités, calcul qui mériteroit bien qu'on en eût un traité élémentaire en françois, non-seulement à cause des nombreuses applications qu'on en fait aujourd'hui, mais aussi parce qu'il exerce l'esprit plus que tout autre, & de la maniere la plus agréable.

(*) On nomme ces racines ou ces quantités composées de plus de deux termes, des *polynomes*, pour les distinguer des *binomes* ou des quantités complexes à deux termes.

toutes les combinaisons possibles de trois lettres, & où chaque terme doit avoir pour coefficient, comme ci-dessus, le nombre de ses permutations.

La troisieme puissance de $(a+b+c)^3$ sera, sans passer par la multiplication, $a^3 + 3aab + 3aac + 3abb + 6abc + 3acc + b^3 + 3bbc + 3bcc + c^3$.

Supposons $a=1$, $b=1$, $c=1$, le cube de $1+1+1$, ou de 3, sera $1+3+3+3+6+3+1+3+3+1=27$. Ce résultat est juste & confirme la regle.

Si l'on avoit supposé $a=1$, $b=1$ & $c=-1$, on auroit trouvé pour le cube de $1+1-1$, c'est-à-dire de 1
$1+3-3+3-6+3+1-3+3-1=1$.

CHAPITRE XII.

Du Développement des Puiſſances irrationnelles par des ſuites infinies.

361.

COMME nous avons fait voir de quelle maniere on doit trouver une puiſſance quelconque de la racine $a+b$, quelque grand que ſoit l'expoſant, nous ſommes en état d'exprimer généralement la puiſſance de $a+b$, dont l'expoſant ſeroit indéterminé. Il eſt évident que ſi on indique cet expoſant par n, on aura par la regle donnée plus haut (art. 348 & ſuiv.):

$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 +$, &c.

362.

Que ſi on demandoit la même puiſſance de la racine $a-b$, on ne feroit que changer

les ſignes du ſecond, quatrieme, ſixieme, &c. terme, & on auroit $(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 - \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 -$, &c.

363.

Ces formules ſont d'une utilité inſigne; car elles ſervent auſſi à exprimer toutes les eſpeces de radicaux. Nous avons fait voir que toutes les quantités irrationnelles peuvent ſe mettre ſous la forme de puiſſances dont les expoſans ſont rompus, & que $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, & $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$, &c. on aura donc auſſi

$\sqrt[2]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$ & $\sqrt[4]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{4}}$, &c.

C'eſt pourquoi, ſi l'on veut trouver la racine quarrée de $a+b$, on n'a beſoin que de ſubſtituer à l'expoſant n la fraction $\frac{1}{2}$ dans la formule générale de l'art. 361, & on aura d'abord pour les coefficiens,

$\frac{n}{1} = \frac{1}{2}$; $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4}$; $\frac{n-2}{3} = -\frac{3}{6}$; $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8}$; $\frac{n-4}{5} = -\frac{7}{10}$; $\frac{n-5}{6} = -\frac{9}{12}$. Ensuite $a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ & $a^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{a}}$; $a^{n-2} = \frac{1}{a\sqrt{a}}$; $a^{n-3} = \frac{1}{aa\sqrt{a}}$ &c. ou bien on pourra exprimer ces puissances de a de cette autre maniere : $a^n = \sqrt{a}$; $a^{n-1} = \frac{\sqrt{a}}{a}$; $a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$; $a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3} = \frac{\sqrt{a}}{a^3}$; $a^{n-4} = \frac{a^n}{a^4} = \frac{\sqrt{a}}{a^4}$, &c.

364.

Cela posé, la racine quarrée de $a + b$ pourra s'exprimer de la maniere qui suit :

$$\sqrt{(a+b)} = \sqrt{a} + \frac{1}{2} b \frac{\sqrt{a}}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} bb \frac{\sqrt{a}}{aa} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} b^3 \frac{\sqrt{a}}{a^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} b^4 \frac{\sqrt{a}}{a^4}, \text{ \&c.}$$

365.

Si donc a est un nombre quarré, on pourra assigner la valeur de $\sqrt{a}$, & par

conséquent la racine quarrée de $a + b$ pourra être exprimée par une suite infinie sans aucun signe radical.

Soit, par exemple, $a = cc$, on aura $\sqrt{a} = c$; donc $\sqrt{(cc+b)} = c + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{c} - \frac{1}{8} \frac{bb}{c^3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{b^3}{c^5} - \frac{5}{128} \cdot \frac{b^4}{c^7}$, &c.

On voit par là qu'il n'est aucun nombre dont on ne puisse extraire la racine quarrée de la même maniere ; puisque tout nombre peut se décomposer en deux parties, dont l'une soit un quarré représenté par cc. Si on cherche, par exemple, la racine quarrée de 6, on fera $6 = 4 + 2$, par conséquent $cc = 4$, $c = 2$, $b = 2$; d'où résulte $\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024}$ &c. Si on vouloit ne prendre que les deux premiers termes de cette suite, on auroit $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, dont le quarré $\frac{25}{4}$ est de $\frac{1}{4}$ plus grand que 6 ; mais si on considere trois termes on a $2\frac{7}{16} = \frac{39}{16}$, dont le quarré $\frac{1521}{256}$ est encore de $\frac{15}{256}$ trop petit.

366.

Puisque dans cet exemple $\frac{5}{2}$ approche beaucoup déjà de la valeur vraie de $\sqrt{6}$, nous prendrons pour 6 la quantité équivalente $\frac{25}{4}-\frac{1}{4}$. Ainsi $cc=\frac{25}{4}$; $c=\frac{5}{2}$; $b=-\frac{1}{4}$; & calculant seulement les deux premiers termes, nous trouvons $\sqrt{6}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}$ $=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}-\frac{1}{20}=\frac{49}{20}$; le quarré de cette fraction étant $\frac{2401}{400}$, ne surpasse que de $\frac{1}{400}$ le quarré de $\sqrt{6}$.

Faisant maintenant $6=\frac{2401}{400}-\frac{1}{400}$, de sorte que $c=\frac{49}{20}$ & $b=-\frac{1}{400}$; & ne prenant encore que les deux premiers termes, on a $\sqrt{6}=\frac{49}{20}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}=\frac{49}{20}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}=\frac{49}{20}$ $-\frac{1}{1960}=\frac{4801}{1960}$, dont le quarré est $=\frac{23049601}{3841600}$. Or 6 réduit au même dénominateur est $=\frac{23049600}{3841600}$; l'erreur n'est donc plus que de $\frac{1}{3841600}$.

367.

On pourra de la même maniere exprimer la racine cubique de $a+b$ par une série infinie. Car puisque $\sqrt[3]{(a+b)}=(a+b)^{\frac{1}{3}}$, on aura dans la formule générale $n=\frac{1}{3}$, & pour les coefficiens, $\frac{n}{1}=\frac{1}{3}$; $\frac{n-1}{2}=-\frac{1}{3}$; $\frac{n-2}{3}=-\frac{5}{9}$; $\frac{n-3}{4}=-\frac{2}{3}$; $\frac{n-4}{5}=-\frac{11}{15}$, &c. & quant aux puissances de a, on aura $a^n=\sqrt[3]{a}$; $a^{n-1}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a}$; $a^{n-2}=\frac{\sqrt[3]{a}}{aa}$; $a^{n-3}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}$ &c.

donc $\sqrt[3]{(a+b)}=\sqrt[3]{a}+\frac{1}{3}\cdot b\frac{\sqrt[3]{a}}{a}-\frac{1}{9}\cdot bb\frac{\sqrt[3]{a}}{aa}$ $+\frac{5}{81}\cdot b^3\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}-\frac{10}{243}\cdot b^4\frac{\sqrt[3]{a}}{a^4}$, &c.

368.

Si donc a est un cube, ou $a=c^3$, on a $\sqrt[3]{a}=c$, & les signes radicaux s'évanouiront; car on aura

$\sqrt[3]{(c^3+b)}=c+\frac{1}{3}\cdot\frac{b}{cc}-\frac{1}{9}\cdot\frac{bb}{c^6}+\frac{5}{81}\cdot\frac{b^3}{c^8}-\frac{10}{243}\cdot\frac{b^4}{c^{11}}$ $+$, &c.

369.

Voilà donc une formule, au moyen de laquelle on pourra trouver *par approximation*, comme on dit, la racine cubique d'un nombre quelconque ; puisque tout nombre peut se partager en deux parties, comme $c^3 + b$, dont la premiere soit un cube.

On voudroit, par exemple, déterminer la racine cubique de 2 ; on représentera 2 par $1 + 1$, de façon que $c = 1$ & $b = 1$, par conséquent $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81}$, &c. les deux premiers termes de cette suite sont $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, dont le cube $\frac{64}{27}$ est trop grand de $\frac{10}{27}$. Qu'on fasse donc $2 = \frac{64}{27} - \frac{10}{27}$, on aura $c = \frac{4}{3}$ & $b = -\frac{10}{27}$, & par conséquent $\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}}$. Ces deux termes sont $\frac{4}{3} - \frac{5}{72} = \frac{91}{72}$, dont le cube est $\frac{753571}{373248}$. Or $2 = \frac{746496}{373248}$, ainsi l'erreur est $\frac{7075}{373248}$. Et voilà

comment on pourra approcher toujours davantage, & d'autant plus vîte qu'on prendra un plus grand nombre de termes (*).

(*) M. *Halley* a donné dans les *Transactions philosophiques* de 1694 une méthode très-belle & très-générale pour extraire par approximation les racines d'un degré quelconque. Monsieur *Halley* prouve qu'on a généralement $\sqrt[m]{a^m \pm b} = \frac{m-2}{m-1} a + \sqrt{\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(mm-m)a^{m-2}}}$. Ceux qui ne seront pas à portée de consulter les *Transactions philosophiques*, trouveront des éclaircissemens sur la formation & sur les usages de cette formule, dans la nouvelle édition des *Leçons élémentaires de Mathématiques* de M. l'Abbé de *la Caille*, publiées par M. l'Abbé *Marie*.

CHAPITRE XIII.

Du Développement des Puissances négatives.

370.

Nous avons fait voir plus haut qu'on peut exprimer $\frac{1}{a}$ par a^{-1}; on peut donc de même exprimer $\frac{1}{a+b}$ par $(a+b)^{-1}$; de sorte que la fraction $\frac{1}{a+b}$ peut être regardée comme une puissance de $a+b$, c'est-à-dire celle dont l'exposant est -1; & il s'ensuit de-là que la série trouvée ci-dessus pour la valeur de $(a+b)^n$ s'étend aussi à ce cas.

371.

Puis donc que $\frac{1}{a+b}$ signifie autant que $(a+b)^{-1}$, supposons dans la formule citée $n=-1$; nous aurons d'abord pour les coefficiens: $\frac{n}{1}=-1$; $\frac{n-1}{2}=-1$; $\frac{n-2}{3}=-1$; $\frac{n-3}{4}=-1$, &c. & ensuite pour les puissances de a:

$a^n=a^{-1}=\frac{1}{a}$; $a^{n-1}=a^{-2}=\frac{1}{a^2}$; $a^{n-2}=\frac{1}{a^3}$; $a^{n-3}=\frac{1}{a^4}$, &c. ainsi $(a+b)^{-1}=\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{bb}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}$ &c. & c'est la même suite que nous avons déjà trouvée plus haut par la division.

372.

De plus $\frac{1}{(a+b)^2}$ étant autant que $(a+b)^{-2}$, réduisons aussi cette formule en une suite infinie. Il faudra pour cet effet supposer $n=-2$, & nous aurons pour les coefficiens d'abord $\frac{n}{1}=-\frac{2}{1}$; $\frac{n-1}{2}=-\frac{3}{2}$; $\frac{n-2}{3}=-\frac{4}{3}$; $\frac{n-3}{4}=-\frac{5}{4}$, &c. Et pour les puissances de a: $a^n=\frac{1}{a^2}$; $a^{n-1}=\frac{1}{a^3}$; $a^{n-2}=\frac{1}{a^4}$; $a^{n-3}=\frac{1}{a^5}$, &c. Nous obtenons donc $(a+b)^{-2}=\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{2}{1}\cdot\frac{b}{a^3}+\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{bb}{a^4}-\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{b^3}{a^4}+\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{b^4}{a^5}$, &c.

Or $\frac{2}{1}=2$; $\frac{2}{1}.\frac{3}{2}=3$; $\frac{2}{1}.\frac{3}{2}.\frac{4}{3}=4$; $\frac{2}{1}.\frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\frac{5}{4}=5$, &c. Par conséquent nous avons

$$\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a^2}-2\frac{b}{a^3}+3\frac{b^2}{a^4}-4\frac{b^3}{a^5}+5\frac{b^4}{a^6}-6\frac{b^5}{a^7}+7\frac{b^6}{a^8}, \text{ \&c.}$$

373.

Continuons & supposons $n=-3$, nous aurons une suite qui exprimera la valeur de $\frac{1}{(a+b)^3}$ ou de $(a+b)^{-3}$. Les coefficiens seront: $\frac{n}{1}=-\frac{3}{1}$; $\frac{n-1}{2}=-\frac{4}{2}$; $\frac{n-2}{3}=-\frac{5}{3}$; $\frac{n-3}{4}=-\frac{6}{4}$, &c. & les puissances de a deviennent: $a^n=\frac{1}{a^3}$; $a^{n-1}=\frac{1}{a^4}$; $a^{n-2}=\frac{1}{a^5}$ &c. ce qui nous donne: $\frac{1}{(a+b)^3}=\frac{1}{a^3}$

$$-\frac{3}{1}\frac{b}{a^4}+\frac{3}{1}.\frac{4}{2}\frac{b^2}{a^5}-\frac{3}{1}.\frac{4}{2}.\frac{5}{3}\frac{b^3}{a^6}+\frac{3}{1}.\frac{4}{2}.\frac{5}{3}.\frac{6}{4}\frac{b^4}{a^7}$$

$$\text{\&c.}=\frac{1}{a^3}-3\frac{b}{a^4}+6\frac{b^2}{a^5}-10\frac{b^3}{a^6}+15\frac{b^4}{a^7}-21\frac{b^5}{a^8}+28\frac{b^6}{a^9}-36\frac{b^7}{a^{10}}+45\frac{b^8}{a^{11}} \text{ \&c.}$$

Faisons encore $n=-4$, nous aurons pour les coefficiens: $\frac{n}{1}=-\frac{4}{1}$; $\frac{n-1}{2}=-\frac{5}{2}$; $\frac{n-2}{3}=-\frac{6}{3}$; $\frac{n-3}{4}=-\frac{7}{4}$ &c. & pour les puissances: $a^n=\frac{1}{a^4}$; $a^{n-1}=\frac{1}{a^5}$; $a^{n-2}=\frac{1}{a^6}$; $a^{n-3}=\frac{1}{a^7}$; $a^{n-4}=\frac{1}{a^8}$, &c. d'où l'on tire:

$$\frac{1}{(a+b)^4}=\frac{1}{a^4}-\frac{4}{1}.\frac{b}{a^5}+\frac{4}{1}.\frac{5}{2}.\frac{b^2}{a^6}-\frac{4}{1}.\frac{5}{2}.\frac{6}{3}\frac{b^3}{a^7}+\frac{4}{1}.\frac{5}{2}.\frac{6}{3}.\frac{7}{4}.\frac{b^4}{a^8} \text{ \&c.}=\frac{1}{a^4}-4\frac{b}{a^5}+10\frac{b^2}{a^6}-20\frac{b^3}{a^7}+35\frac{b^4}{a^8}-56\frac{b^5}{a^9}+, \text{ \&c.}$$

374.

Les différens cas que nous venons de considérer nous mettent en état maintenant de conclure avec certitude qu'on aura généralement pour une telle puissance négative quelconque de $a+b$:

$$\frac{1}{(a+b)^m}=\frac{1}{a^m}-\frac{m}{1}.\frac{b}{a^{m+1}}+\frac{m}{1}.\frac{m+1}{2}.\frac{b^2}{a^{m+2}}-\frac{m}{1}.\frac{m+1}{2}.\frac{m+2}{3}.\frac{b^3}{a^{m+3}}+, \text{ \&c.}$$

Et on peut, moyennant cette formule, transformer toutes ces especes de fractions en suites infinies, en substituant même à *m* des fractions, afin d'exprimer des formules irrationnelles.

375.

Pour éclaircir encore davantage cette matiere, nous joindrons ici les considérations qui suivent.

Nous avons trouvé :

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} + , \text{\&c.}$$

Si nous multiplions donc cette suite par $a+b$, il faut que le produit soit $=1$: & cela se trouve vrai, comme on va le voir, en effectuant la multiplication :

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} + \text{\&c.}$$

$$a+b$$

$$1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5} + \text{\&c.}$$

+

$$+ \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5} - \text{\&c.}$$

1

376.

Nous avons trouvé aussi $\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7}$ &c. Si on multiplie donc cette suite par $(a+b)^2$, il faut que le produit soit pareillement $=1$. Or $(a+b)^2 = aa+2ab+bb$, voici donc le plan de l'opération :

$$\frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7} + \text{\&c.}$$

$$aa+2ab+bb$$

$$1 - \frac{2b}{a} + \frac{3bb}{aa} - \frac{4b^3}{a^3} + \frac{5b^4}{a^4} - \frac{6b^5}{a^5} + \text{\&c.}$$

$$+ \frac{2b}{a} - \frac{4bb}{aa} + \frac{6b^3}{a^3} - \frac{8b^4}{a^4} + \frac{10b^5}{a^5} - \text{\&c.}$$

$$+ \frac{bb}{aa} - \frac{2b^3}{a^3} + \frac{3b^4}{a^4} - \frac{4b^5}{a^5} + \text{\&c.}$$

1 produit que la nature de la chose exigeoit.

377.

Que si l'on ne multiplioit que par $a+b$ la série trouvée pour la valeur de $\frac{1}{(a+b)^2}$, il faudroit que le produit répondît à la fraction $\frac{1}{a+b}$, ou fût égal à la série trouvée ci-dessus, $\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{bb}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}$ &c. & c'est ce que la multiplication effective confirmera.

$$\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3bb}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}\ \&c.$$
$$a+b$$

$$\frac{1}{a}-\frac{2b}{aa}+\frac{3bb}{a^3}-\frac{4b^3}{a^4}+\frac{5b^4}{a^5}\ \&c.$$
$$+\frac{b}{aa}-\frac{2bb}{a^3}+\frac{3b^3}{a^4}-\frac{4b^4}{a^5}\ \&c.$$

$$\frac{1}{a}-\frac{b}{aa}+\frac{bb}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\&c.$$

SECTION TROISIEME.

Des Rapports & des Proportions.

CHAPITRE PREMIER.

Du Rapport arithmétique, ou de la différence entre deux Nombres.

378.

DEUX grandeurs sont ou égales l'une à l'autre, ou elles ne le sont pas. Dans ce dernier cas où l'une est plus grande que l'autre, on peut envisager leur inégalité sous deux points de vue différens; on peut demander *de combien* une des quantités est plus grande que l'autre? On peut aussi demander *combien de fois* l'une est plus grande que l'autre? Les déterminations qui forment les réponses à ces deux questions, se

nomment toutes deux des rapports ou des raisons ; on a coutume de nommer la premiere *rapport arithmétique*, & la seconde *rapport géométrique*, sans cependant que ces dénominations ayent aucune liaison avec la chose même ; c'est arbitrairement qu'elles ont été adoptées.

379.

On s'imagine bien sans doute qu'il faut que les grandeurs dont nous parlons soient d'une même espece, puisque sans cela on ne pourroit rien déterminer au sujet de leur égalité ou de leur inégalité. Il seroit absurde, par exemple, de demander si deux livres & trois aunes sont des quantités égales ? C'est pourquoi dans ce qui va suivre il ne peut être question que de quantités d'une même espece ; & comme elles peuvent toujours être assignées en nombres, ce n'est aussi, comme nous en avons averti dès le commencement, que des nombres dont nous traiterons.

380.

Quand on demande donc de deux nombres donnés, de combien l'un est plus grand que l'autre, la réponse à cette question détermine le rapport arithmétique de ces deux nombres. Or puisque cette détermination se fait en indiquant la différence des deux nombres, il s'ensuit qu'un rapport arithmétique n'est autre chose que la différence entre deux nombres. Et comme ce mot de *différence* nous paroît une expression plus propre, nous réserverons celles de *rapport* ou *raison*, pour exprimer les rapports géométriques.

381.

La différence entre deux nombres se trouve, comme on sait, en soustrayant le plus petit du plus grand ; rien de plus facile par conséquent que de résoudre la question, de combien l'un est plus grand que l'autre. Et dans le cas donc où les nombres sont

égaux, la différence étant nulle ou zéro; si l'on demande de combien un des nombres est plus grand que l'autre, on répondra, de rien. Par exemple, 6 étant = 2.3, la différence entre 6 & 2.3 est 0.

382.

Mais lorsque les deux nombres ne sont pas égaux, comme 5 & 3, & qu'on demande de combien 5 est plus grand que 3, la réponse est, de 2; & elle se détermine en soustrayant 3 de 5. De même 15 est plus grand que 5, de 10; & 20 surpasse 8 de 12.

383.

Nous avons donc trois choses à considérer ici: 1°. le plus grand des deux nombres; 2°. le plus petit, & 3°. la différence. Et ces trois quantités ont entr'elles une liaison telle, que deux des trois étant données, elles déterminent toujours la troisieme.

Soit le plus grand nombre $=a$, le plus petit $=b$, & la différence $=d$; on trouvera la différence d en soustrayant b de a, de façon que $d=a-b$; d'où l'on voit comment a & b étant donnés on peut trouver d.

384.

Mais si c'est la différence qui est donnée avec le plus petit des deux nombres, ou b, ce sera le nombre plus grand qu'on pourra déterminer, savoir en ajoutant ensemble la différence & le nombre plus petit, ce qui donne $a=b+d$. Car si on ôte de $b+d$ le moindre nombre b, il reste d, qui est la différence connue. Soit le moindre nombre $=12$, la différence $=8$, le nombre plus grand sera $=20$.

385.

Enfin si outre la différence d le plus grand nombre a est donné, on trouve l'autre nombre b en soustrayant la différence du plus grand nombre, ce qui fait qu'on a $b=a-d$. Car si j'ôte le nombre $a-d$ du nombre

plus grand a, il reste d, qui est la différence donnée.

386.

La liaison entre ces trois nombres a, b, d est donc telle qu'on en tire les trois déterminations suivantes : 1°. $d = a - b$; 2°. $a = b + d$; 3°. $b = a - d$; & si une de ces trois comparaisons est juste, il faut nécessairement que les deux autres le soient aussi. Donc en général si $z = x + y$, il faut absolument que $y = z - x$ & $x = z - y$.

387.

Il est à remarquer au sujet de ces raisons arithmétiques, que si l'on ajoute aux deux nombres a & b un nombre c pris à volonté, ou qu'on l'en soustraie, la différence reste la même. C'est-à-dire que si d est la différence entre a & b, ce nombre d sera aussi la différence entre $a + c$ & $b + c$, & entre $a - c$ & $b - c$. Par exemple, la différence entre les nombres 20 & 12 étant 8,

cette différence restera la même, quelque nombre qu'on ajoute à ces nombres 20 & 12, & quelque nombre qu'on en retranche.

388.

La preuve en est évidente. Car si $a - b = d$, on a aussi $(a + c) - (b + c) = d$; & de même $(a - c) - (b - c) = d$.

389.

Si on double les deux nombres a & b, la différence deviendra double aussi. Ainsi quand $a - b = d$, on aura $2a - 2b = 2d$; & en général $na - nb = nd$, quelque nombre qu'on prenne pour n.

CHAPITRE II.

Des Proportions arithmétiques.

390.

LORSQUE deux rapports arithmétiques ſont égaux, cette égalité ſe nomme une *proportion arithmétique.*

Ainſi quand $a-b=d$ & $p-q=d$, de ſorte que la différence eſt la même entre les nombres p & q, qu'entre les nombres a & b, on dit que ces quatre nombres forment une proportion arithmétique; on l'écrit $a-b=p-q$, & on indique clairement par là que la différence entre a & b eſt égale à la différence entre p & q.

391.

Une proportion arithmétique conſiſte donc dans quatre termes, qui doivent être tels, que ſi on ſouſtrait le ſecond du premier, le reſte ſe trouve le même qu'en

ſouſtrayant le quatrieme du troiſieme. Ainſi ces quatre nombres 12, 7, 9, 4 forment une proportion arithmétique, parce que $12-7=9-4$ (*).

392.

Quand on a une proportion arithmétique comme $a-b=p-q$, on peut faire changer de place au ſecond & au troiſieme terme, en écrivant $a-p=b-q$; cette égalité ne ſera pas moins vraie. Car puiſque $a-b=p-q$, qu'on ajoute d'abord b des deux côtés, on aura $a=b+p-q$. Qu'on ſouſtraie enſuite p des deux côtés, on aura $a-p=b-q$.

Ainſi, comme $12-7=9-4$, on a auſſi $12-9=7-4$.

393.

On peut auſſi dans toute proportion arithmétique, mettre le ſecond terme à la place

(*) Pour déſigner que ces nombres ſont une telle proportion, quelques-uns les écrivent ainſi: 12.7:9.4.

du premier, si on fait en même temps une transposition pareille du troisieme & du quatrieme. C'est-à-dire que si $a-b=p-q$, on aura aussi $b-a=q-p$. Car $b-a$ est la négative de $a-b$, & de même $q-p$ est la négative de $p-q$. Ainsi, puisque $12-7=9-4$, on a pareillement $7-12=4-9$.

394.

Mais la propriété principale d'une proportion arithmétique quelconque est celle-ci : que la somme du second & du troisieme terme est égale constamment à la somme du premier & du quatrieme terme. Cette propriété, à laquelle il faut bien faire attention, s'exprime aussi de cette façon : la somme des *moyens* est égale à la somme des *extrêmes*. Ainsi, comme $12-7=9-4$, on a $7+9=12+4$; & en effet la somme est 16 de part & d'autre.

395.

Soit, pour démontrer cette propriété principale, $a-b=p-q$; si on ajoute de part & d'autre $b+q$, on a $a+q=b+p$; c'est-à-dire que la somme du premier & du quatrieme terme est égale à la somme du second & du troisieme. Et réciproquement, si quatre nombres, a, b, p, q, sont tels que la somme du second & du troisieme est égale à la somme du premier & du quatrieme, c'est-à-dire que $b+p=a+q$, on en conclut, sans pouvoir se tromper, que ces nombres sont en proportion arithmétique, & que $a-b=p-q$. En effet, puisque $a+q=b+p$, si on soustrait de l'un & de l'autre côté $b+q$, on obtient $a-b=p-q$.

Ainsi les nombres 18, 13, 15, 10 étant tels que la somme des moyens $13+15=28$ est égale à la somme des extrêmes $18+10=28$, on est certain qu'ils forment aussi une proportion arithmétique, & par conséquent que $18-13=15-10$.

396.

Il eſt facile au moyen de la propriété dont nous parlons, de réſoudre la queſtion qui ſuit : les trois premiers termes d'une proportion arithmétique étant donnés, trouver le quatrieme ? Soient a, b, p ces trois premiers termes, & exprimons par q le quatrieme qu'il s'agit de déterminer, nous aurons $a+q=b+p$; ſouſtrayant enſuite a de part & d'autre, nous obtenons $q=b+p-a$. Ainſi le quatrieme terme ſe trouve en ajoutant enſemble le ſecond & le troiſieme, & en ſouſtrayant de cette ſomme le ſecond. Suppoſez, par exemple, que 19, 28, 13 ſoient les trois premiers termes donnés, la ſomme du ſecond & du troiſieme eſt $=41$; ôtez-en le premier qui eſt 19, il reſte 22 pour le quatrieme terme cherché, & la proportion arithmétique ſera indiquée par $19-28=13-22$, ou par $28-19=22-13$, ou par $28-22=19-13$.

397.

Lorſque dans une proportion arithmétique le ſecond terme eſt égal au troiſieme, on n'a que trois nombres, mais dont la propriété eſt telle, que le premier moins le ſecond fait autant que le ſecond moins le troiſieme, ou bien que la différence entre le premier & le ſecond nombre eſt égale à la différence entre le ſecond & le troiſieme. Les trois nombres 19, 15, 11 ſont de cette eſpece, puiſque $19-15=15-11$.

398.

On dit de trois nombres tels que ceux-là, qu'ils forment une proportion arithmétique continue, & on le déſigne quelquefois par le ſigne $\div$, en écrivant, par exemple, $\div 19, 15, 11$. On nomme auſſi ces ſortes de proportions des *progreſſions arithmétiques*, ſur-tout s'il y a un plus grand nombre de termes qui ſe ſuivent conformément à la même loi.

Une progreſſion arithmétique peut être ou *croiſſante* ou *décroiſſante*. La premiere dénomination lui convient quand les termes vont en augmentant, c'eſt-à-dire, quand le ſecond ſurpaſſe le premier, & que le troiſieme ſurpaſſe d'autant le ſecond, comme ces nombres-ci, 4, 7, 10. La progreſſion décroiſſante eſt celle où les termes vont toujours en diminuant de la même quantité, tels ſont les nombres 9, 5, 1.

399.

Suppoſons que les nombres a, b, c ſoient en progreſſion arithmétique, il faut que $a-b=b-c$, d'où il ſuit, à cauſe de l'égalité de la ſomme des extrêmes & de celle des moyens, que $2b=a+c$; & ſi on ſouſtrait a de part & d'autre, on a $c=2b-a$.

400.

Ainſi quand les deux premiers termes, a, b, d'une progreſſion arithmétique ſont donnés, on trouve le troiſieme, en ôtant le

premier du double du ſecond. Soient 1 & 3 les deux premiers termes d'une progreſſion arithmétique, le troiſieme ſera $=2.3-1=5$. Et ces trois nombres 1, 3, 5 donnent la proportion $1-3=3-5$.

401.

On peut, en ſuivant la même voie, aller plus loin & continuer la progreſſion arithmétique auſſi loin qu'on voudra: on n'a qu'à chercher le quatrieme terme moyennant le ſecond & le troiſieme, de la même maniere qu'on a déterminé le troiſieme au moyen du premier & du ſecond, & ainſi de ſuite. Soit a le premier terme, & b le ſecond, le troiſieme ſera $=2b-a$, le quatrieme $=4b-2a-b=3b-2a$, le cinquieme $6b-4a-2b+a=4b-3a$, le ſixieme $=8b-6a-3b+2a=5b-4a$, le ſeptieme $=10b-8a-4b+3a=6b-5a$.

CHAPITRE III.

Des Progressions Arithmétiques.

402.

Nous avons insinué qu'on nomme *progression arithmétique* une suite de nombres composée d'autant de termes qu'on veut, lesquels croissent ou décroissent toujours d'une même quantité.

Ainsi les nombres naturels écrits par ordre, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, &c. forment une progression arithmétique, parce qu'ils augmentent toujours de l'unité; & la suite 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1, &c. est aussi une telle progression, puisque ces nombres diminuent constamment de 3.

403.

Le nombre ou la quantité dont les termes d'une progression arithmétique deviennent

plus grands ou plus petits, se nomme la *différence*. Ainsi quand le premier terme est donné avec la différence, on peut continuer la progression arithmétique aussi loin qu'on voudra. Soit, par exemple, le premier terme $=2$, & la différence $=3$, on aura la progression croissante qui suit: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, &c. où chaque terme se trouve en ajoutant la différence au terme précédent.

404.

On a coutume d'écrire les nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5, &c. au-dessus des termes d'une telle progression arithmétique, afin qu'on reconnoisse d'abord le rang où un terme quelconque se trouve être dans la progression. On peut nommer ces nombres écrits au-dessus des termes, des *indices*; ainsi l'exemple cité s'écrira comme il suit:

Indices, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
Prog. arithm. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29

&c. où l'on voit que 29 est le dixieme terme.

405.

Soit a le premier terme, & d la différence, la progression arithmétique continuera dans cet ordre :

1	2	3	4	5	6	7	
a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,	$a+5d$,	$a+6d$,	&c.

par lequel on voit qu'il est facile de trouver aussi-tôt un terme quelconque de la progression, sans qu'il soit nécessaire de connoître tous les termes précédens, & uniquement par le moyen du premier terme a & de la différence d. Par exemple, le dixieme terme sera $=a+9d$, le centieme terme $=a+99d$, & en général le terme n quelconque sera $=a+(n-1)d$.

406.

Lorsqu'on s'arrête en quelqu'endroit de la progression, il est essentiel de faire attention au premier & au dernier terme, & l'indice du dernier indiquera le nombre des termes. Si donc le premier terme $=a$, la différence $=d$, & le nombre des termes $=n$, on a le dernier terme $=a+(n-1)d$, lequel se trouve par conséquent en multipliant la différence par le nombre des termes moins un, & ajoutant à ce produit le premier terme.

Supposez, par exemple, une progression arithmétique de cent termes, dont le premier $=4$, & que la différence soit $=3$, le dernier terme sera $=99.3+4=301$.

407.

Lorsqu'on connoît le premier terme a & le dernier z, avec le nombre des termes $=n$, on peut trouver la différence d. Car puisque le dernier terme $z=a+(n-1)d$, si on soustrait de part & d'autre a, on obtient $z-a=(n-1)d$. Ainsi en soustrayant le premier terme du dernier, on a le produit de la différence multipliée par le nombre des termes moins 1. On n'aura donc qu'à

divifer $z-a$ par $n-1$ pour obtenir la valeur cherchée de la différence d, qui fera $=\frac{z-a}{n-1}$. Ce réfultat fournit cette regle : on fouftrait le premier terme du dernier terme, & on divife le refte par le nombre des termes diminué de l'unité, le quotient eft la différence ; par le moyen de laquelle on eft en état enfuite d'écrire toute la progreffion.

408.

Suppofons, par exemple, une progreffion arithmétique de neuf termes, dont le premier foit $=2$, & le dernier $=26$, & qu'il s'agiffe de trouver la différence. Il faudra donc fouftraire le premier terme 2 du dernier 26 & divifer le refte, qui eft 24, par $9-1$, c'eft-à-dire par 8 ; le quotient 3 fera égal à la différence cherchée, & la progreffion entiere fera :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26.

Suppofons, pour donner un autre exemple, que le premier terme foit $=1$, le

dernier $=2$, le nombre des termes $=10$, & qu'on demande la progreffion arithmétique qui répond à ces fuppofitions, nous aurons auffi-tôt pour la différence $\frac{2-1}{10-1}=\frac{1}{9}$, & de-là nous conclurons que la progreffion eft :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,	$1\frac{1}{9}$,	$1\frac{2}{9}$,	$1\frac{3}{9}$,	$1\frac{4}{9}$,	$1\frac{5}{9}$,	$1\frac{6}{9}$,	$1\frac{7}{9}$,	$1\frac{8}{9}$,	2.

Autre exemple. Soit le premier terme $=2\frac{1}{3}$, le dernier $=12\frac{1}{2}$, & le nombre des termes $=7$, on aura la différence $\frac{12\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}{7-1}=\frac{10\frac{1}{6}}{6}=\frac{61}{36}=1\frac{25}{36}$, & par conféquent la progreffion :

1	2	3	4	5	6	7
$2\frac{1}{3}$,	$4\frac{1}{36}$,	$5\frac{13}{18}$,	$7\frac{5}{12}$,	$9\frac{1}{9}$,	$10\frac{29}{36}$,	$12\frac{1}{2}$.

409.

Maintenant fi les données font le premier terme a, le dernier terme z & la différence d, elles font trouver le nombre des termes n. Car puifque $z-a=(n-1)d$, on divifera des deux côtés par d, & on aura

$\frac{z-a}{d} = n - 1$. Or n étant de 1 plus grand que $n-1$, on a $n = \frac{z-a}{d} + 1$; par conséquent le nombre des termes se trouve en divisant la différence entre le premier & le dernier terme, ou $z - a$, par la différence de la progression, & en ajoutant l'unité au quotient $\frac{z-a}{d}$.

Soit, par exemple, le premier terme $=4$, le dernier $=100$, & la différence $=12$, le nombre des termes sera $\frac{100-4}{12} + 1$; & voici quels seront ces neuf termes :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,	16,	28,	40,	52,	64,	76,	88,	100.

Si le premier terme $=2$, le dernier $=6$, & la différence $=1\frac{1}{3}$, le nombre des termes sera $\frac{4}{1\frac{1}{3}} + 1 = 4$, & ces quatre termes seront

1	2	3	4
2,	$3\frac{1}{3}$,	$4\frac{2}{3}$,	6.

Soit encore le premier terme $=3\frac{1}{3}$, le dernier $=7\frac{2}{3}$, & la différence $=1\frac{4}{9}$, le

nombre des termes sera $= \frac{7\frac{2}{3} - 3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}} + 1$ $=4$; & voici ces quatre termes :

$3\frac{1}{3}$, $4\frac{7}{9}$, $6\frac{2}{9}$, $7\frac{2}{3}$.

410.

Mais il faut observer que le nombre des termes devant être nécessairement un nombre entier, si on n'avoit pas trouvé un tel nombre pour n dans les exemples de l'article précédent, les questions auroient été absurdes.

Toutes les fois donc qu'on ne trouvera pas un nombre entier pour la valeur de $\frac{z-a}{d}$, il sera impossible de résoudre la question; & par conséquent pour que ces sortes de questions soient possibles, il faut que $z - a$ soit divisible par d.

411.

On conclura de ce que nous avons dit, qu'on a toujours quatre quantités ou élémens à considérer dans une progression arithmétique:

I. le premier terme a,

II. le dernier terme z,

III. la différence d,

IV. le nombre des termes n.

Et les rapports de ces quantités les unes aux autres sont tels, que si on en connoît trois, on est en état de déterminer la quatrieme; car:

I. Si a, d & n sont connus, on a $z = a + (n - 1)d$.

II. Si z, d & n sont connus, on a $a = z - (n - 1)d$.

III. Si a, z & n sont connus, on a $d = \frac{z-a}{n-1}$.

IV. Si a, z & d sont connus, on a $n = \frac{z-a}{d} + 1$.

CHAPITRE IV.

De la Sommation des Progressions arithmétiques.

412.

ON a souvent besoin aussi de prendre la somme d'une progression arithmétique. On la trouveroit en ajoutant ensemble tous les termes; mais comme cette addition seroit très-prolixe, quand la progression consiste en un grand nombre de termes, on a imaginé une regle, par le secours de laquelle on trouve très-facilement la somme dont nous parlons.

413.

Nous considérerons d'abord une progression de cette espece qui soit donnée, & telle que le premier terme $= 2$, la différence $= 3$, le dernier terme $= 29$, & le nombre des termes $= 10$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29.

Nous voyons que dans cette progreſſion la ſomme du premier & du dernier terme $=31$; la ſomme du ſecond & du pénultieme $=31$; la ſomme du troiſieme & de l'antépénultieme $=31$, & ainſi de ſuite ; & nous en conclurons que la ſomme de deux termes quelconques également éloignés l'un du premier & l'autre du dernier terme, eſt toujours égale à la ſomme du premier & du dernier terme.

414.

Il eſt facile d'en ſaiſir la raiſon. Car ſi nous ſuppoſons le premier terme $=a$, le dernier $=z$, & la différence $=d$, la ſomme du premier & du dernier terme eſt $=a+z$; & le ſecond terme étant $=a+d$ & le pénultieme $=z-d$, la ſomme de ces deux termes eſt auſſi $=a+z$. Enſuite le troiſieme terme étant $a+2d$, & l'antépénultieme $=z-2d$, il eſt clair que ces deux termes ajoutés enſemble font auſſi $a+z$. On démontrera la même choſe de tous les autres.

415.

Pour parvenir donc à déterminer la ſomme de la progreſſion propoſée on écrira deſſous, terme pour terme, la même progreſſion priſe à rebours, & on fera l'addition des termes correſpondans, comme il ſuit :

$$\begin{array}{l} 2+5+8+11+14+17+20+23+26+29 \\ 29+26+23+20+17+14+11+8+5+2 \\ \hline 31+31+31+31+31+31+31+31+31+31 \end{array}$$

Cette ſuite de termes égaux eſt évidemment égale au double de la ſomme de la progreſſion propoſée ; or le nombre de ces termes égaux eſt 10, comme dans la progreſſion, & leur ſomme, par conſéquent, $=10.31=310$. Ainſi, puiſque cette ſomme eſt le double de la ſomme de la progreſſion arithmétique, il faut que cette ſomme cherchée ſoit $=155$.

416.

Si on procede de la même maniere à l'égard d'une progression arithmétique quelconque, dont le premier terme soit $=a$, le dernier $=z$, & le nombre des termes $=n$; en écrivant sous la progression donnée la même progression en rétrogradant, on aura, en faisant l'addition terme à terme, une suite de n termes, dont chacun sera $=a+z$; la somme de cette suite sera par conséquent $=n(a+z)$, & elle sera le double de la somme de la progression arithmétique proposée; celle-ci sera donc $=\frac{n(a+z)}{2}$.

417.

Ce résultat fournit une méthode facile pour trouver la somme d'une progression arithmétique quelconque; elle se réduit à cette regle:

Multipliez la somme du premier & du dernier terme par le nombre des termes, la moitié du produit indiquera la somme de toute la progression.

Ou, ce qui revient au même, multipliez la somme du premier & du dernier terme par la moitié du nombre des termes.

Ou bien, multipliez la moitié de la somme du premier & du dernier terme par le nombre total des termes. Ces deux manieres d'énoncer la regle, donnent également la somme de la progression.

418.

Il sera nécessaire d'éclaircir cette regle par quelques exemples.

Soit d'abord la progression des nombres naturels, 1, 2, 3 &c. jusqu'à 100, dont il s'agisse de trouver la somme. Celle-ci sera par la premiere regle $=\frac{100.101}{2}=50.101=5050$.

Si on demande combien de coups une horloge sonne en douze heures? il faudra ajouter ensemble les nombres 1, 2, 3 jusqu'à 12; or cette somme se trouve sur le

champ $=\frac{12.13}{2}=6.13=78$. Que si l'on vouloit savoir la somme de la même progression continuée jusqu'à 1000, on trouveroit 500500; & la somme de cette progression, continuée jusqu'à 10000, feroit 50005000.

419.

Autre question. Quelqu'un achete un cheval, sous la condition que pour le premier clou il payera 5 sous, pour le second 8, pour le troisieme 11, & pareillement toujours 3 sous de plus pour chacun des suivans: le cheval a 32 clous, on demande combien il coûtera à l'acheteur?

On voit qu'il s'agit ici de trouver la somme d'une progression arithmétique, dont le premier terme est 5, la différence $=3$, & la somme des termes $=32$. Il faut donc commencer par déterminer le dernier terme; on le trouve (par la regle des articles 406, 411) $=5+31.3=98$. Maintenant la somme cherchée se trouve, sans difficulté, $=\frac{103.32}{2}=103.16$; d'où l'on conclut que le cheval coûte 1648 sous, ou 82 liv. 8 s.

420.

Soit en général le premier terme $=a$, la différence $=d$, & le nombre des termes $=n$; & qu'il s'agisse de trouver, par le moyen de ces données, la somme de toute la progression. Comme le dernier terme doit être $=a+(n-1)d$, la somme du premier & du dernier sera $=2a+(n-1)d$. Multipliant cette somme par le nombre des termes n, on a $2na+n(n-1)d$; donc la somme cherchée sera $=na+\frac{n(n-1)d}{2}$.

Cette formule appliquée à l'exemple précédent, où $a=5$, $d=3$, & $n=32$, donne $5.32+\frac{31.32.5}{2}=160+1488=1648$; la même somme qu'on avoit trouvée.

421.

S'il est question d'ajouter ensemble tous les nombres naturels depuis 1 jusqu'à n, on

a pour trouver cette ſomme : le premier terme $=1$, le dernier terme $=n$, & le nombre des termes $=n$; donc la ſomme cherchée $=\frac{nn+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$.

Si on fait $n=1766$, la ſomme de tous les nombres, depuis 1 juſqu'à 1766, ſera $=883.1767=1560261$.

422.

Soit propoſée la progreſſion des nombres impairs, 1, 3, 5, 7, &c. continuée juſqu'à n termes, & qu'on en demande la ſomme :

Le premier terme eſt ici $=1$, la différence $=2$, le nombre des termes $=n$; le dernier terme ſera donc $=1+(n-1)2$ $=2n-1$, & par conſéquent la ſomme cherchée $=nn$.

Tout ſe réduit donc à multiplier le nombre des termes par lui-même. Ainſi quel que ſoit le nombre des termes de cette progreſſion qu'on ajoute enſemble, la ſomme ſera toujours un quarré, ſavoir le quarré du

nombre des termes. C'eſt ce que nous allons mettre ſous les yeux :

Indic.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 &c.
Progreſ.	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 &c.
Somme,	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 &c.

423.

Soit à préſent le premier terme $=1$, la différence $=3$, & le nombre des termes $=n$, on aura la progreſſion 1, 4, 7, 10, &c. dont le dernier terme ſera $=1+(n-1)3$ $=3n-2$; donc la ſomme du premier & du dernier terme $=3n-1$, & par conſéquent la ſomme de cette progreſſion $=\frac{n(3n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$. Si on ſuppoſe $n=20$, la ſomme eſt $=10.59=590$.

424.

Soit encore le premier terme $=1$, la différence $=d$, & le nombre des termes $=n$, le dernier terme ſera $=1+(n-1)d$. Ajoutant le premier on a $2+(n-1)d$, & multipliant par le nombre des termes on

a $2n+n(n-1)d$, d'où ſe déduit la ſomme de la progreſſion $=n+\frac{n(n-1)d}{2}$.

Joignons ici la petite table qui ſuit:

Si $d=1$, la ſomme eſt $=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{nn+n}{2}$

$d=2$ — — — — $n+\frac{2n(n-1)}{2}=nn$

$d=3$ — — — — $n+\frac{3n(n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$

$d=4$ — — — — $n+\frac{4n(n-1)}{2}=2nn-n$

$d=5$ — — — — $n+\frac{5n(n-1)}{2}=\frac{5nn-3n}{2}$

$d=6$ — — — — $n+\frac{6n(n-1)}{2}=3nn-2n$

$d=7$ — — — — $n+\frac{7n(n-1)}{2}=\frac{7nn-5n}{2}$

$d=8$ — — — — $n+\frac{8n(n-1)}{2}=4nn-3n$

$d=9$ — — — — $n+\frac{9n(n-1)}{2}=\frac{9nn-7n}{2}$

$d=10$ — — — $n+\frac{10n(n-1)}{2}=5nn-4n$

&c.

CHAPITRE V.

Des Nombres figurés ou polygones.

425.

LA ſommation des progreſſions arithmétiques qui commencent par 1, & dont la différence eſt 1 ou 2 ou 3, ou quelqu'autre nombre entier que ce ſoit; cette ſommation, dis-je, nous conduit à la théorie des *nombres polygones*, leſquels ſe forment quand on ajoute enſemble quelques termes de l'une ou de l'autre de ces progreſſions.

426.

Si on ſuppoſe la différence $=1$; puiſque le premier terme eſt conſtamment $=1$, on aura la progreſſion arithmétique, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, &c. Et ſi dans cette progreſſion on prend la ſomme de un, de deux, de trois &c. termes, on verra ſe former cette ſuite de nombres:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66 &c. car $1=1$, $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$, &c.

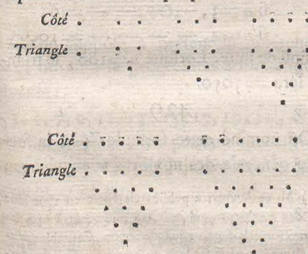
Ces nombres on les nomme *triangulaires* ou *trigonaux*, parce qu'on peut toujours ranger en triangle autant de points qu'ils contiennent d'unités, comme on va voir:



427.

On voit dans tous ces triangles combien chaque côté contient de points. Dans le premier triangle il n'y a qu'un point ; dans le second il y en a deux ; dans le troisieme

il y en a trois ; dans le quatrieme il y en a quatre, &c. Ainsi les nombres triangulaires, ou le nombre des points (qu'on nomme simplement le *triangle*), se reglent sur le nombre des points que contient le côté, lequel nombre on nomme en un mot le *côté*. C'est-à-dire que le troisieme nombre triangulaire, par exemple, ou le troisieme triangle, est celui dont le côté a trois points ; le quatrieme, celui dont le côté est quatre, & ainsi de suite ; & voici comment nous représenterons cette propriété :



428.

Il se présente donc ici la question, comment, le côté étant donné, on doit déterminer le triangle? Et après ce que nous avons exposé, nous y satisferons facilement.

Car soit le côté $= n$, le triangle sera $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots n$. Or la somme de cette progression est $= \frac{nn+n}{2}$; par conséquent la valeur du triangle est $\frac{nn+n}{2}$ (*).

Et si $n = 1$, le triangle est $= 1$,
si $n = 2$, — — — — $= 3$,
si $n = 3$, — — — — $= 6$,
si $n = 4$, — — — — $= 10$,

& ainsi de suite. Lorsque $n = 100$, le triangle sera $= 5050$.

429.

On nomme cette formule $\frac{nn+n}{2}$, la formule générale des nombres triangulaires;

(*) M. *de Joncourt* a publié à la Haye en 1762 une table des nombres trigonaux, qui répondent à tous les nombres naturels depuis 1 jusqu'à 20000. Ces tables peuvent être utiles pour faciliter un grand nombre d'opérations arithmétiques, comme l'Auteur le fait voir dans une Introduction fort étendue.

parce que par son secours on trouve le nombre triangulaire, ou le triangle, qui répond à un côté quelconque indiqué par n.

On peut transformer cette formule en celle-ci, $\frac{n(n+1)}{2}$; & cela sert même à faciliter le calcul, parce que toujours un des deux nombres n, ou $n + 1$, est un nombre pair, & par conséquent divisible par 2.

C'est ainsi que si $n = 12$, le triangle est $= \frac{12.13}{2} = 6.13 = 78$. Et que si $n = 15$, le triangle est $= \frac{15.16}{2} = 15.8 = 120$, &c.

430.

Qu'on suppose à présent la différence $= 2$, on aura la progression arithmétique suivante:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, &c.

dont les sommes, en prenant successivement un, deux, trois, quatre termes &c. forment cette série:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 &c.

On nomme les termes de cette suite, les nombres *quadrangulaires*, ou plutôt

quarrés ; puisqu'en effet cette suite représente les quarrés des nombres naturels, comme nous les avons trouvés plus haut ; & cette dénomination leur convient d'autant plus, qu'on peut toujours former un quarré du nombre de points qu'indiquent ces termes, ainsi qu'on va le voir :

1, 4, 9, 16, 25,



36, 49,



431.

On voit ici que le côté d'un tel quarré contient précisément le nombre de points

qu'indique la racine quarrée. Le côté du quarré 25, par exemple, est de cinq points ; celui du quarré 36 est de six points ; & en général donc, si le côté est n, c'est-à-dire que le nombre des termes de la progression, 1, 3, 5, 7, &c. qu'on aura pris, soit indiqué par n, on voit que le quarré, ou le nombre quadrangulaire, sera égal à la somme de ces termes, ou $= nn$, ainsi que nous l'avons trouvée à l'article 422. Nous ne nous arrêterons pas davantage à ces nombres quarrés, en ayant traité au long plus haut.

432.

Faisant maintenant la différence $= 3$, & prenant de la même maniere les sommes, on obtiendra des nombres qu'on appelle *pentagones*, quoiqu'on ne puisse plus si bien les représenter par des points (*). Ces suites commencent ainsi :

(*) Ce n'est pas cependant qu'on ne puisse aussi représenter par des points les polygones d'un nombre quel-

Indices, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 &c.
Prog. arith. 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 &c.
Pentagone, 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117 &c.
les indices indiquant le côté de chaque pentagone.

433.

Il s'ensuit de-là que si on fait le côté $=n$, le nombre pentagone sera $=\frac{3nn-n}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}$. Soit, par exemple, $n=7$, le pentagone sera $=70$. Si on demande le pentagone, dont le côté est 100, on fera $n=100$, & on aura 14950 pour le nombre cherché.

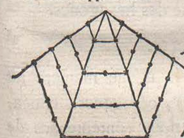
conque de côtés ; mais la regle que j'ai remarqué qu'il faut suivre pour cet effet, & que je vais indiquer, me paroît avoir échappé à tous les Algébristes que j'ai consultés.

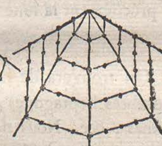
On commence par tracer un petit polygone régulier qui ait le nombre de côtés qu'on demande ; ce nombre reste constant pour une même suite de nombres polygones, & il est égal à 2 *plus* la différence de la progression arithmétique qui produit la suite ; on choisit ensuite un des angles de ce polygone pour tirer du point de concours autant de diagonales indéfinies qu'il est possible ; on prolonge de même indéfiniment les deux côtés qui forment l'angle qu'on a adopté ; après cela on prend ces deux côtés & les diagonales du premier polygone,

434.

Que si l'on suppose la différence $=4$, on parvient aux nombres *hexagones*, comme on le voit dans les progressions qui suivent :

respectivement autant de fois qu'on veut sur les lignes indéfinies ; on tire des points correspondans où le compas s'est arrêté, des lignes paralleles aux côtés du premier polygone, & on les partage en autant de parties égales, ou par autant de points qu'en ont actuellement les diagonales & les deux côtés prolongés. Cette regle est générale depuis le triangle jusqu'au polygone d'un nombre infini de côtés. Les deux figures qui suivent suffiront pour en faciliter l'application.





La division de ces figures en triangles fournit encore matiere à différentes considérations curieuses & à des transformations assez jolies des formules générales, par lesquelles on voit dans ce chapitre comment s'expriment les nombres polygones ; mais je ne crois pas devoir m'y arrêter.

Indices, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 &c.
Prog. arith. 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33 &c.
Hexagone, 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153 &c.
les indices montrant encore le côté de chaque hexagone.

435.

Ainſi quand le côté eſt n, le nombre hexagone eſt $= 2nn - n = n(2n-1)$; & on obſervera au reſte que tous les nombres hexagones ſont auſſi triangulaires, puiſque en ne prenant de ces derniers que le premier, le troiſieme, le cinquieme &c. on a préciſément la ſuite des hexagones.

436.

On trouvera de la même maniere les nombres heptagones, octogones, ennéagones, &c. Nous nous contenterons de donner encore ici le tableau des formules générales de tous ces nombres, compris ſous le nom général de *nombres polygones*.

En ſuppoſant le côté $= n$, on a

le triangle $= \frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$,

le quarré $= \frac{2nn+0n}{2} = nn$,

le V gone $= \frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$,

le VI gone $= \frac{4nn-2n}{2} = 2nn-n = n(2n-1)$

le VII gone $= \frac{5nn-3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}$,

le VIII gone $= \frac{6nn-4n}{2} = 3nn-2n = n(3n-2)$

le IX gone $= \frac{7nn-5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2}$,

le X gone $= \frac{8nn-6n}{2} = 4nn-3n = n(4n-3)$

le XI gone $= \frac{9nn-7n}{2} = \frac{n(9n-7)}{2}$,

le XII gone $= \frac{10nn-8n}{2} = 5nn-4n = n(5n-4)$

le XX gone $= \frac{18nn-16n}{2} = 9nn-8n = n(9n-8)$

le XXV gone $= \frac{23nn-21n}{2} = \frac{n(23n-21)}{2}$,

le m gone $= \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$ (*).

437.

Ainſi le côté étant n, on a en général le nombre m angulaire $= \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$; d'où l'on peut déduire tous les nombres poly-

(*) On remarquera ſans peine que cette table n'eſt que celle de l'article 424 pouſſée plus loin.

gones possibles dont le côté seroit n. Si on cherchoit, par exemple, les nombres biangulaires, on auroit $m=2$, & par conséquent le nombre cherché $=n$; c'est-à-dire que les nombres biangulaires sont les nombres naturels 1, 2, 3, &c.

Si on fait $m=3$, on a le nombre triangulaire $=\frac{nn+n}{2}$.

Si on fait $m=4$, on a le nombre quarré $=nn$, &c.

438.

Supposons, pour éclaircir cette regle par des exemples, qu'on cherche le nombre XXV gone, dont le côté est 36; on cherchera d'abord dans notre table le nombre XXV gone pour le côté n; on le trouvera $=\frac{23nn-21n}{2}$. Faisant ensuite $n=36$, on trouvera le nombre cherché $=14526$.

439.

Question. Quelqu'un a acheté une maison, & on lui demande combien il en a payé? Il répond que le nombre 365 gone de

de 12 est le nombre d'écus qu'il l'a achetée.

Afin de trouver ce nombre, on fera $m=365$ & $n=12$; & substituant ces valeurs dans la formule générale, on trouvera pour le prix de la maison 23970 écus (*).

(*) Le chapitre qu'on vient de lire, est intitulé *des nombres figurés* ou *polygones*. On peut avoir remarqué que ce n'est pas sans fondement que quelques Algébristes distinguent entre nombres *figurés* & nombres *polygones*. En effet les nombres qu'on nomme communément *figurés*, dérivent tous d'une seule progression arithmétique, & chaque suite de ces nombres se forme après cela en ajoutant ensemble les termes de la suite précédente. Chaque suite des nombres *polygones*, au contraire, provient d'une progression arithmétique différente; cela fait qu'on ne peut dire à la rigueur d'une seule suite de nombres figurés, qu'elle est en même temps une suite de nombres polygones. On s'en convaincra mieux en jetant les yeux sur les tables qui suivent.

TABLE DES NOMBRES FIGURÉS.

Nombres constans - - - - -	1.1. 1. 1. 1. 1. &c.
naturels - - - - -	1.2. 3. 4. 5. 6. &c.
triangulaires - - -	1.3. 6.10.15. 21. &c.
pyramidaux - - -	1.4.10.20.35. 56. &c.
trianguli-pyramidaux	1.5.15.35.70.126. &c.

TABLE DES NOMBRES POLYGONES.

Diff. de la progr.	Nombres
1	triangulaires - - 1.3. 6.10.15. &c.
2	quarrés - - - 1.4. 9.16.25. &c.
3	pentagones - - 1.5.12.22.35. &c.
4	hexagones - - 1.6.15.28.45. &c.

Les puissances forment aussi des suites particulieres de nombres. Les deux premieres se retrouvent dans les nombres figurés, & la troisieme dans les nombres polygones ; c'est ce qu'on va voir, en substituant à *a* successivement les nombres 1, 2, 3 &c.

TABLE DES PUISSANCES.

a^0	- - - - - - 1. 1. 1. 1. 1. &c.
a^1	- - - - - - 1. 2. 3. 4. 5. &c.
a^2	- - - - - - 1. 4. 9. 16. 25. &c.
a^3	- - - - - - 1. 8.27. 64.125. &c.
a^4	- - - - - - 1.16.81.256.625. &c.

Les Algébristes du seizieme & du dix-septieme siecle se sont tous beaucoup occupés de ces différentes especes de nombres & de leurs rapports entr'elles ; ils y ont trouvé une variété singuliere de propriétés curieuses ; mais leur utilité n'étant cependant pas grande, on néglige aujourd'hui, avec raison, d'en parler beaucoup dans les cours de Mathématiques.

CHAPITRE VI.

Du Rapport Géométrique.

440.

LE *rapport géométrique* entre deux nombres contient la réponse à la question, *combien de fois* l'un de ces nombres est plus grand que l'autre? On le trouve en divisant l'un par l'autre ; le quotient indique la raison cherchée.

441.

On a donc trois choses à considérer ici ; 1°. le premier des deux nombres proposés, qu'on nomme l'*antécédent* ; 2°. l'autre nombre, qu'on appelle le *conséquent* ; 3°. *la raison* des deux nombres, ou le quotient de la division de l'antécédent par le conséquent. Par exemple, si c'est le rapport des nombres 18 & 12 qu'il s'agit d'indiquer, 18 est l'antécédent, 12 est le conséquent,

& la raiſon ſera $\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$; d'où l'on voit que l'antécédent contient le conſéquent une fois & demie.

442.

On a coutume d'indiquer le rapport géométrique par deux points, mis l'un au-deſſus de l'autre entre l'antécédent & le conſéquent.

Ainſi $a:b$ ſignifie le rapport géométrique de ces deux nombres, ou la raiſon de b à a. Nous avons déjà remarqué plus haut qu'on ſe ſert de ce ſigne pour indiquer la diviſion, & c'eſt auſſi pourquoi on l'emploie ici; parce qu'afin de connoître ce rapport, il faut qu'on diviſe a par b. La raiſon, indiquée par ce ſigne, ſe prononce en diſant ſimplement a eſt à b.

443.

On repréſente donc l'expreſſion d'un rapport par une fraction dont le numérateur eſt l'antécédent, & dont le dénominateur eſt le conſéquent. La clarté exige

qu'on réduiſe toujours cette fraction à ſes moindres termes, ce qu'on fait, comme nous l'avons montré plus haut, en diviſant le numérateur & le dénominateur par leur plus grand commun diviſeur. Ainſi la fraction $\frac{18}{12}$ ſe réduit à $\frac{3}{2}$, en diviſant les deux termes par 6.

444.

Les rapports ne different donc entr'eux qu'en tant que leurs raiſons ſont differentes; & il y a autant de différentes eſpeces de rapports géométriques qu'on peut imaginer de différentes raiſons.

La premiere eſpece eſt ſans contredit celle où la raiſon devient l'unité; ce cas arrive quand les deux nombres ſont égaux, comme dans $3:3$; $4:4$; $a:a$; la raiſon eſt ici 1, & à cauſe de cela on la nomme le rapport de l'égalité.

Viennent enſuite les eſpeces où la raiſon eſt un autre nombre entier; dans $4:2$ la raiſon eſt 2, & on la nomme raiſon *double*;

dans 12:4 la raiſon eſt 3, & on la nomme raiſon *triple*; dans 24:6 la raiſon eſt 4, & elle s'appelle raiſon *quadruple*, &c.

Après ces eſpeces là viennent celles dont les raiſons s'expriment par des fractions, comme 12:9, où la raiſon eſt $\frac{4}{3}$ ou $1\frac{1}{3}$; 18:27, où la raiſon eſt $\frac{2}{3}$, &c. On peut même diſtinguer parmi celles-ci les raiſons où le conſéquent contient exactement deux fois, trois fois &c. l'antécédent: tels ſont les rapports 6:12, 5:15 &c. dont quelques-uns nomment les raiſons, raiſons *ſoûdoubles*, *ſoûtriples*, &c.

Nous ajouterons qu'on nomme raiſon *de nombre à nombre*, celle dont le quotient n'eſt pas un nombre inexprimable, l'antécédent & le quotient étant des nombres entiers, comme 11:7, 8:15 &c. & qu'on appelle raiſon *irrationnelle* ou *ſourde*, celle dont le quotient ne peut s'exprimer exactement ni par des nombres entiers, ni par des fractions, comme $\sqrt{5}$ à 8, 4 à $\sqrt{3}$.

445.

Soit à préſent a l'antécédent, b le conſéquent & d la raiſon, nous ſavons déjà que a & b étant donnés, on trouve $d=\frac{a}{b}$.

Que ſi le conſéquent b étoit donné avec la raiſon, on trouveroit l'antécédent $a=bd$, parce que bd diviſé par b fait d. Enfin ſi l'antécédent a eſt donné & la raiſon d, on trouvera le conſéquent $b=\frac{a}{d}$; car en diviſant l'antécédent a par ce conſéquent $\frac{a}{d}$, on trouve le quotient d, c'eſt-à-dire la raiſon.

446.

Tout rapport $a:b$ reſte conſtant, ſoit qu'on multiplie ou qu'on diviſe l'antécédent & le conſéquent par le même nombre, parce que la raiſon reſte la même. Soit d la raiſon de $a:b$, on a $d=\frac{a}{b}$; or la raiſon du rapport $na:nb$ eſt auſſi $\frac{a}{b}=d$, & celle du rapport $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}$ eſt pareillement $\frac{a}{b}=d$.

447.

Quand une raiſon a été réduite à ſes moindres termes, il eſt facile d'en reconnoître le rapport & de l'énoncer. Par exempl. quand la raiſon $\frac{a}{b}$ a été réduite à la fraction $\frac{p}{q}$, on dit $a:b=p:q$, $a:b::p:q$, ce qui ſe prononce, a eſt à b comme p eſt à q. Ainſi, la raiſon du rapport 6:3 étant $\frac{2}{1}$ ou 2, on dira 6:3=2:1. On aura de même 18:12 =3:2, & 24:18=4:3, & 30:45=2:3 &c. Que ſi la raiſon ne peut s'abréger, le rapport ne deviendra pas plus clair; on ne ſimplifie pas en diſant 9:7=9:7.

448.

On peut, au contraire, transformer quelquefois en un rapport clair & ſimple celui de deux très-grands nombres, ſavoir, lorſque la raiſon ſe réduit à de très-petits termes. Par exemple, quand on peut dire 28844:14422=2:1, ou 10566:7044=3:2, ou 57600:25200=16:7.

449.

Il eſt donc eſſentiel, pour exprimer un rapport quelconque de la maniere la plus claire qu'il ſoit poſſible, de chercher à réduire la raiſon aux plus petits nombres qu'il ſe puiſſe. Cela ſe fait facilement, en diviſant les deux termes du rapport par leur plus grand commun diviſeur. Par exemple, pour réduire le rapport 57600:25200 à celui-ci, 16:7, tout conſiſte dans la ſeule opération de diviſer les nombres 576 & 252 par 36, qui eſt leur plus grand commun diviſeur.

450.

On voit donc auſſi combien il importe qu'on ſache toujours trouver le plus grand commun diviſeur de deux nombres donnés; mais c'eſt ce qui demande une méthode que nous détaillerons dans le chapitre ſuivant.

CHAPITRE VII.

Du plus grand commun Diviseur de deux Nombres donnés.

451.

IL est des nombres qui n'ont d'autre commun diviseur que l'unité, & quand le numérateur & le dénominateur d'une fraction sont de cette nature, il n'est pas possible de la réduire à une forme plus commode.

On voit, par exemple, que les deux nombres 48 & 35 n'ont pas de commun diviseur, quoique chacun ait ses diviseurs en particulier. C'est pourquoi on ne peut exprimer plus simplement le rapport 48:35, parce que la division de deux nombres par 1 ne les rend pas plus petits.

452.

Mais lorsque les deux nombres ont un commun diviseur, on le trouve, & même

le plus grand qu'ils aient, par la regle suivante :

Il faut diviser le plus grand des deux nombres par le plus petit ; on divisera ensuite par le résidu le diviseur précédent ; ce qui reste dans cette seconde division, servira après cela de diviseur pour une troisieme division, dans laquelle le résidu ou le diviseur précédent sera le dividende, & on continuera de la même maniere jusqu'à ce qu'on arrive à une division sans reste ; le diviseur de cette division, & par conséquent le dernier diviseur, sera le plus grand commun diviseur des deux nombres donnés.

Voici cette opération pour les deux nombres 576 & 252 :

```
252 | 576 | 2
    | 504 |
      72 | 252 | 3
         | 216 |
            36 | 72 | 2
               | 72 |
                  0.
```

Ainſi le plus grand commun diviſeur eſt ici 36.

453.

Il ſera bon d'éclaircir encore cette regle par quelques autres exemples.

Suppoſons qu'on cherche le plus grand commun diviſeur des nombres 504 & 312, on aura:

312 | 504 | 1
      312
192 | 312 | 1
      192
120 | 192 | 1
      120
72 | 120 | 1
      72
48 | 72 | 1
      48
24 | 48 | 2
      48
      o.

Ainſi 24 eſt le plus grand commun diviſeur, & par conſéquent le rapport 504:312 ſe réduit à la forme 21:13.

454.

Soit donné le rapport 625 : 529, & qu'on cherche le plus grand diviſeur commun entre ces deux nombres :

529 | 625 | 1
      529
96 | 529 | 5
      480
49 | 6 | 1
      49
47 | 49 | 1
      47
2 | 47 | 23
      46
1 | 2 | 2
      2
      o.

Donc 1 eſt ici le plus grand commun diviſeur, & par conſéquent on ne peut exprimer la raiſon 625 : 529 par des nombres plus petits, & la réduire à de moindres termes.

455.

Il sera nécessaire à présent de donner aussi la démonstration de cette regle. Supposons pour cela que a soit le plus grand & b le plus petit des nombres donnés, & que d soit un de leurs communs diviseurs, on comprendra d'abord que a & b étant divisibles par d, on pourra aussi diviser par d les quantités $a - b$, $a - 2b$, $a - 3b$, & en général $a - nb$.

456.

Le réciproque n'est pas moins vrai; c'est-à-dire que si les nombres b & $a - nb$ sont divisibles par d, le nombre a sera aussi divisible par d. Car nb pouvant être divisés par d, on ne pourroit diviser $a - nb$ par d, si a n'étoit pas divisible de même par d.

457.

Nous remarquerons de plus que si d est le *plus grand* commun diviseur des deux nombres b & $a - nb$, il sera aussi le plus grand commun diviseur des deux nombres a & b. Car si, pour ces nombres a & b, un diviseur commun plus grand que d pouvoit avoir lieu, ce nombre seroit aussi un diviseur commun de b & $a - nb$, & par conséquent d ne seroit pas le plus grand diviseur de ces deux nombres. Or nous venons de supposer d le plus grand diviseur commun à b & à $a - nb$; donc il faut que d soit aussi le plus grand commun diviseur de a & de b.

458.

Ces trois choses étant posées, divisons, suivant la regle, le plus grand nombre a par le plus petit b; & supposons le quotient $= n$, nous aurons le résidu $a - nb$, qui ne peut qu'être plus petit que b. Or ce reste $a - nb$ ayant le même plus grand commun diviseur avec b que les nombres donnés a & b, on n'a qu'à recommencer la division, en divisant le diviseur précédent b par ce résidu $a - nb$; le nouveau résidu qu'on ob-

tiendra, aura encore, avec le diviseur précédent, le même plus grand commun diviseur, & ainsi de suite.

459.

On continuera donc de la même maniere, jusqu'à ce qu'on parvienne à une division sans reste, c'est-à-dire où le résidu soit zéro. Soit p ce dernier diviseur, contenu exactement un certain nombre de fois dans son dividende ; ce dividende sera donc divisible par p, & aura la forme mp; ainsi ces nombres p & mp sont tous les deux divisibles par p, & il est sûr qu'ils n'ont pas de plus grand commun diviseur, parce qu'aucun nombre ne peut être divisé réellement par un nombre plus grand que lui-même. Par conséquent c'est aussi ce dernier diviseur qui est le plus grand commun diviseur des nombres proposés a & b, & voilà la démonstration de la regle prescrite.

460.

Mettons ici encore un exemple de la même regle, en cherchant le plus grand commun

commun diviseur des nombres 1728 & 2304. Voici l'opération :

1728	2304	1
	1728	
576	1728	3
	1728	
	0.	

Il s'ensuit de-là que 576 est le plus grand commun diviseur, & que le rapport 1728 : 2304 se réduit à celui-ci, 3 : 4 ; c'est-à-dire que 1728 est à 2304 tout comme 3 est à 4.

CHAPITRE VIII.

Des Proportions Géométriques.

461.

DEUX rapports géométriques sont égaux lorsque leurs raisons sont égales. Cette égalité de deux rapports se nomme une *proportion géométrique* ; & on écrit, par exemple, $a:b = c:d$ ou $a:b::c:d$, pour indiquer que

le rapport $a:b$ eſt égal au rapport $c:d$; mais on exprime plus ſimplement la ſignification de cette formule, en diſant a eſt à b comme c à d. Une telle proportion eſt celle-ci, $8:4=12:6$; car la raiſon du rapport $8:4$ eſt $\frac{2}{1}$, & c'eſt auſſi la raiſon du rapport $12:6$.

462.

Ainſi $a:b=c:d$ étant une proportion géométrique, il faut qu'une même raiſon ait lieu des deux côtés, & que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; & réciproquement ſi les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ſont égales, on a $a:b=c:d$.

463.

Une proportion géométrique conſiſte donc en quatre termes, tels que le premier, diviſé par le ſecond, donne le même quotient que le troiſieme, diviſé par le quatrieme. On déduit de-là une propriété importante, commune à toutes les proportions géométriques, & qui eſt que le produit

du premier & du quatrieme terme eſt toujours égal au produit du ſecond & du troiſieme; ou plus ſimplement, que le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

464.

Prenons, pour démontrer cette propriété, la proportion géométrique $a:b=c:d$, de ſorte que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Si on multiplie l'une & l'autre de ces deux fractions par b, on obtient $a=\frac{bc}{d}$, & multipliant de plus par d des deux côtés, on a $ad=bc$. Or ad eſt le produit des termes extrêmes, bc eſt celui des moyens, & ces deux produits ſe trouvent égaux.

465.

Réciproquement ſi les quatre nombres a, b, c, d, ſont tels que le produit des deux extrêmes a & d eſt égal au produit des deux moyens b & c, on eſt certain qu'ils forment une proportion géométrique. Car, puiſque $ad=bc$, on n'a qu'à diviſer de part

& d'autre par bd, on aura $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, & par conséquent $a:b=c:d$.

466.

Les quatre termes d'une proportion géométrique, comme $a:b=c:d$, peuvent se transposer de différentes manieres, sans que la proportion cesse de subsister. Car le principal étant toujours que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens, ou $ad=bc$, on peut dire: 1°. $b:a=d:c$; 2°. $a:c=b:d$; 3°. $d:b=c:a$; 4°. $d:c=b:a$.

467.

Outre ces quatre proportions géométriques, on peut en déduire encore d'autres de la même proportion, $a:b=c:d$. On peut dire: $a+b:a$, ou le premier terme plus le second, est au premier, comme le troisieme + le quatrieme est au troisieme, c'est-à-dire, $a+b:a=c+d:c$.

On peut ensuite dire: le premier — le second est au premier comme le troisieme

— le quatrieme est au troisieme, ou bien $a-b:a=c-d:c$.

Car si l'on prend le produit des extrêmes & des moyens, on a $ac-bc=ac-ad$, ce qui revient évidemment à l'égalité $ad=bc$.

Enfin il est facile aussi de démontrer que $a+b:b=c+d:d$; & que $a-b:b=c-d:d$.

468.

Toutes les proportions que nous avons vu dériver de $a:b=c:d$, peuvent se représenter de la maniere générale qui suit:

$$ma+nb:pa+qb=mc+nd:pc+qd.$$

Car le produit des termes extrêmes est $mpac+npbc+mqad+nqbd$, ou, puisque $ad=bc$, ce produit devient $mpac+npbc+mqbc+nqbd$. De plus le produit des termes moyens est $mpac+mqbc+npad+nqbd$, ou, à cause de $ad=bc$, il est $mpac+mqbc+npbc+nqbd$, ainsi ces deux produits sont égaux.

469.

Il est donc clair qu'une proportion géométrique étant donnée, par exemple, 6:3

=10:5, on peut en déduire une infinité d'autres de celle-ci. Nous n'en mettrons ici que quelques-unes.

3:6=5:10; 6:10=3:5; 9:6=15:10;
3:3=5:5; 9:15=3:5; 9:3=15:5.

470.

Puisque dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, on peut, les trois premiers termes étant connus, trouver par leur moyen le quatrieme. Soient les trois premiers termes 24:15=40 à.... comme le produit des moyens est ici 600, il faut que le quatrieme terme multiplié par le premier, c'est-à-dire par 24, fasse pareillement 600; par conséquent en divisant 600 par 24, le quotient 25 sera le quatrieme terme cherché, & la proportion entiere sera 24:15 =40:25. En général donc, si les trois premiers termes sont $a:b=c:\ldots$ on mettra d pour la quatrieme lettre inconnue; & puisqu'il faut que $ad=bc$, on divisera de part

& d'autre par a, & on aura $d=\frac{bc}{a}$. Ainsi le quatrieme terme est $=\frac{bc}{a}$, & on le trouve en multipliant le second terme par le troisieme, & en divisant ce produit par le premier terme.

471.

Voilà le fondement de cette *regle de trois* si célebre dans l'arithmétique; car que cherche-t-on dans cette regle? On suppose trois nombres donnés, & on en cherche un quatrieme qui soit avec ceux-là en proportion géométrique; de façon que le premier soit au second comme le troisieme est au quatrieme.

472.

Quelques circonstances particulieres se présentent à remarquer ici.

Dabord, si dans deux proportions les premiers & les troisiemes termes sont les mêmes, comme dans $a:b=c:d$ & $a:f=c:g$, je dis que les deux seconds & les deux quatriemes termes seront aussi en proportion

géométrique, & que $b:d=f:g$. Car la premiere proportion ſe transformant en celle-ci, $a:c=b:d$, & la ſeconde en celle-ci, $a:c=f:g$, il s'enſuit que les raiſons $b:d$ & $f:g$ ſont égales, puiſque chacune d'elles eſt égale à la raiſon $a:c$. Par exemple, ſi $5:100=2:40$, & $5:15=2:6$, il faut que $100:40=15:6$.

473.

Mais ſi deux proportions ſont telles que les termes moyens ſont les mêmes dans l'une & dans l'autre, je dis que les premiers termes ſeront en raiſon inverſe avec les quatriemes. C'eſt-à-dire, ſi $a:b=c:d$, & $f:b=c:g$, il s'enſuit que $a:f=g:d$. Soient, par exemple, les proportions $24:8=9:3$, & $6:8=9:12$, on aura $24:6=12:3$. La raiſon en eſt évidente : la premiere proportion donne $ad=bc$; la ſeconde donne $fg=bc$; donc $ad=fg$, & $a:f=g:d$, ou $a:g=f:d$.

474.

Deux proportions étant données, on peut toujours en faire une nouvelle, en multi-

pliant ſéparément le premier terme de l'une par le premier terme de l'autre, le ſecond par le ſecond, & ainſi des autres termes. C'eſt ainſi que les proportions $a:b=c:d$ & $e:f=g:h$ fourniront celle-ci, $ae:bf=cg:dh$. Car la premiere donnant $ad=bc$, & la ſeconde donnant $eh=fg$, on aura auſſi $adeh=bcfg$. Or $adeh$ eſt le produit des extrêmes, & $bcfg$ eſt le produit des moyens dans la nouvelle proportion ; ainſi ces deux produits étant égaux, la proportion eſt vraie.

475.

Soient, par exemple, les deux proportions, $6:4=15:10$ & $9:12=15:20$, leur combinaiſon donnera la proportion, $6.9:4.12=15.15:10.20$,

ou $54:48=225:200$,

ou $9:8=9:8$.

476.

Nous obſerverons enfin que ſi deux produits ſont égaux, comme $ad=bc$, on peut

réciproquement convertir cette égalité en une proportion géométrique.

On a toujours l'un des facteurs du premier produit à un des facteurs du second produit, comme l'autre facteur du second produit à l'autre facteur du second produit; c'est-à-dire, dans notre cas $a:c=b:d$, ou $a:b=c:d$. Soit $3.8=4.6$, on en formera cette proportion, $8:4=6:3$, ou celle-ci, $3:4=6:8$. De même si $3.5=1.15$, on aura $3:15=1:5$, ou $5:1=15:3$, ou $3:1=15:5$.

CHAPITRE IX.

Remarques sur les Proportions & sur leur usage.

477.

CETTE théorie est tellement nécessaire dans la vie commune, que personne presque ne peut s'en passer. Il y a toujours proportion entre les prix & les marchandises;

& quand il est question de différentes especes de monnoie, tout se réduit à déterminer les rapports qui sont entr'elles. Les exemples que ces réflexions nous fournissent, seront très-propres à éclaircir les principes des proportions, & à en faire voir l'utilité dans l'application.

478.

On voudroit savoir, par exemple, le rapport entre deux especes de monnoie: supposons un louis d'or vieux & un ducat; il faudra voir d'abord combien ces especes valent, étant comparées à une même espece. Ainsi un louis vieux valant à Berlin 5 rixdales & 8 gros, & un ducat valant 3 rixdales, si on réduit ces deux valeurs à une même espece; soit à des rixdales, ce qui donne la proportion 1 L.: 1 D.: $=5\frac{1}{3}$ R. : 3 R. ou $=16:9$; soit à des gros, dans lequel cas on auroit 1 L.: 1 D. $=128:72$ $=16:9$. On voit que ces proportions donnent le rapport juste du louis vieux au ducat;

car l'égalité des produits des extrêmes & des moyens donne dans l'une & dans l'autre 9 louis = 16 ducats; & au moyen de cette comparaison on pourra changer en ducats une somme quelconque de louis d'or vieux, & réciproquement. Supposez qu'on demande combien 1000 louis vieux font en ducats, vous ferez cette regle de trois : 9 louis font 16 ducats; que font 1000 louis? & vous répondrez, $1777\frac{7}{9}$ ducats.

Que si l'on demandoit, au contraire, combien 1000 ducats font de louis d'or vieux, il faudroit faire cette regle de trois: 16 ducats font 9 louis; que font 1000 ducats? *réponse*, $562\frac{1}{2}$ louis d'or vieux.

479.

Ici (à Saint-Pétersbourg) la valeur du ducat varie & dépend du cours du change. C'est ce cours qui détermine la valeur du rouble en stuvers ou sous de Hollande, desquels 105 font un ducat.

Ainsi quand le change est à 45 stuvers, on a cette proportion, 1 rouble : 1 ducat = 45 : 105 = 3 : 7; & de-là l'égalité : 7 roubles = 3 ducats.

On trouvera par-là combien un ducat fait en roubles; car 3 ducats : 7 roubles = 1 ducat : .... *réponse*, $2\frac{1}{3}$ roubles.

Si le change étoit à 50 stuvers, on auroit cette proportion, 1 rouble : 1 ducat = 50 : 105 = 10 : 21, ce qui donneroit 21 roubles = 10 ducats; & on auroit 1 ducat = $2\frac{1}{10}$ roubles. Enfin, quand le change est à 44 stuvers, on a 1 rouble : 1 ducat := 44 : 105, & par conséquent 1 ducat = $2\frac{17}{44}$ roubles = 2 roubles $38\frac{7}{14}$ copeckes.

480.

Il s'ensuit de-là qu'on peut aussi comparer ensemble plus de deux especes de monnoie, ce qu'on a très-fréquemment occasion de faire dans les lettres de change. Supposons, pour en donner un exemple, que quelqu'un d'ici ait 1000 roubles à faire

payer à Berlin, & qu'il veuille ſavoir combien cette ſomme fait en ducats à Berlin.

Le change eſt ici à $47\frac{1}{2}$, c'eſt-à-d. qu'un rouble fait $47\frac{1}{2}$ ſtuvers. En Hollande, 20 ſtuvers font un florin; $2\frac{1}{2}$ florins de Hollande font une rixdale de Hollande. De plus le change de la Hollande avec Berlin eſt à 142, c'eſt-à dire que pour 100 rixdales hollandoiſes on paye à Berlin 142 rixdales. Enfin le ducat vaut à Berlin 3 rixdales.

481.

Pour réſoudre maintenant la queſtion propoſée, allons pas à pas. En commençant donc par les ſtuvers, puiſque 1 rouble $=47\frac{1}{2}$ ſtuvers, ou 2 roubles $=95$ ſtuvers, nous ferons 2 roubles : 95 ſtuvers $=$ 1000... *réponſe*, 47500 ſtuvers; & ſi nous allons plus loin & que nous diſions, 20 ſtuvers : 1 florin $=$ 47500 ſtuvers:.... nous aurons 2375 florins.

De plus, $2\frac{1}{2}$ florins $=$ 1 rixdale hollandoiſe, ou 5 florins $=$ 2 rixdales hollandoiſes; on fera donc 5 florins : 2 rixdales hollandoiſes $=$ 2375 florins:.... *réponſe*, 950 rixdales hollandoiſes.

Prenant enſuite les écus de Berlin ſuivant le change à 142, nous aurons 100 rixdales hollandoiſes : 142 rixdales $=$ 950 : au quatrieme terme, 1349 rixdales de Berlin. Paſſons enfin aux ducats, & diſons 3 rixdales : 1 ducat $=$ 1349 rixdales à..... *rép.* $449\frac{2}{3}$ ducats.

482.

Suppoſons, pour rendre ces calculs encore plus complets, que le Banquier de Berlin faſſe difficulté, ſous quelque prétexte que ce ſoit, de payer cette ſomme, & qu'il ne veuille acquitter la lettre de change qu'à raiſon de cinq pour cent de rabais, c'eſt-à-dire en ne payant que 100 au lieu de 105, il faudra encore faire cette regle de trois: $105 : 100 = 449\frac{2}{3}$ à un quatrieme terme, qui eſt $428\frac{16}{63}$ ducats.

483.

Nous venons de voir qu'on avoit besoin de six opérations en se servant de la regle de trois ; or on a trouvé moyen d'abréger extrêmement ces calculs par la regle qu'on nomme *regle de réduction*. Pour expliquer cette regle, nous considérerons d'abord les deux antécédens de chacune des six opérations précédentes:

I.)	2 roubles	:	95 stuvers.
II.)	20 stuvers	:	1 flor. holl.
III.)	5 flor. holl.	:	2 rixd. holl.
IV.)	100 rixd. hol.	:	142 rixd.
V.)	3 rixdales	:	1 ducat.
VI.)	105 ducats	:	100 ducats.

Si nous repassons à présent sur les calculs ci-dessus, nous remarquerons que nous avons toujours multiplié la somme proposée par les seconds termes, & que nous avons divisé les produits par les premiers termes ; il est donc clair qu'on parviendra au même résultat, en multipliant la somme proposée toute d'une fois, par le produit de tous les seconds termes, & en divisant par le produit de tous les premiers termes. Ou, ce qui revient au même, qu'on n'aura qu'à faire la regle de trois suivante : comme le produit de tous les premiers termes est au produit de tous les seconds termes, ainsi le nombre de roubles donné est au nombre de ducats payables à Berlin.

484.

Ce calcul s'abrege encore davantage, quand parmi les premiers termes il s'en trouve qui ont des diviseurs communs avec quelques-uns des seconds termes ; car dans ce cas on efface ces termes, & on met à la place les quotients provenus de la division par ce diviseur commun. L'exemple précédent prendra de cette maniere la forme qu'on va voir:

Roubles	~~2~~.	19~~95~~	ſtuv. 1000 r^bles^
	~~2~~~~0~~.	1	flor. holland.
	~~5~~.	~~2~~	rixd. holland.
	100.	142	rixd.
	3.	1	duc.
	~~1~~~~0~~~~5~~.21.	~~5~~	~~1~~~~00~~ duc.

63~~00~~ : 2698 = 10~~00~~ à....

7)26980.

9)3854(2.

428(2. *Rép.* $428\frac{16}{63}$ ducats.

485.

L'ordre qu'il faut ſuivre en ſe ſervant de la regle de réduction eſt celui-ci : on commence par l'eſpece de monnoie dont il eſt queſtion, & on la compare avec une autre qui doit commencer le rapport ſuivant, dans lequel on compare cette ſeconde eſpece avec une troiſieme, & ainſi de ſuite ; de façon que chaque rapport commence par l'eſpece par laquelle le rapport précédent finiſſoit ; on continue de même juſqu'à ce

qu'on arrive à l'eſpece ſur laquelle on demande la réponſe, & à la fin on tient compte encore des faux frais.

486.

Donnons encore d'autres exemples, afin de faciliter la pratique de ces opérations.

Si les ducats gagnent à Hambourg 1 pour cent ſur deux rixdales de banque, c'eſt-à-dire que 50 ducats valent, non pas 100, mais 101 rixdales de banque, & que le change entre Hambourg & Konigsberg ſoit 119 gros de Pologne, c'eſt-à-dire que 1 rixdale *banco* faſſe 119 gros polonois, combien feront 1000 ducats en florins polonois? 30 gros polonois font 1 florin polon.

Ducat	1	:	~~2~~ rixd. B°. 1000 duc.
	~~1~~~~00~~ 50	:	101 rixd. B°.
	1	:	119 gr. pol.
	30	:	1 flor. pol.

15~~00~~ : 12019 = 10~~00~~ duc. :....

3)120190.

5)40063(1.

8012(3. *Rép.* $8012\frac{2}{3}$ fl. p.

487.

On peut auſſi abréger encore un peu davantage, en écrivant le nombre qui fait le troiſieme terme au-deſſus du ſecond rang; car alors le produit du ſecond rang, diviſé par le produit du premier rang, donnera la réponſe déſirée.

Queſtion. On fait venir à Leipſig des ducats d'Amſterdam, ayant cours dans cette derniere ville à raiſon de 5 flor. 4 ſtuvers courans, c'eſt-à-dire que 1 ducat vaut 104 ſtuvers, & que 5 ducats valent 26 florins hollandois. Si donc l'*agio di B°.* eſt à Amſterdam de 5 pour cent, c'eſt-à-dire que 105 courans faſſent 100 de banque, & que le change de Leipſig à Amſterdam, en argent de banque, ſoit $133\frac{1}{4}$ pour cent, c'eſt-à-dire que pour 100 rixdales on paye à Leipſig $133\frac{1}{4}$ rixdales; enfin 2 rixdales de Hollande faiſant 5 florins de Hollande, on demande combien, ſuivant ces changes, il faudra payer de rixdales à Leipſig pour 1000 ducats?

			~~5~~.~~1000~~	ducats.
Ducats	~~5~~	:	26	fl. holl. cour.
	~~105~~.21	:	4.~~20~~.~~100~~	flor. holl. B°.
	~~5~~	:	~~2~~	rixd. B°.
	~~400~~.~~2~~	:	533	rixd. à Leipſ.
	21	:	3)55432(1.	
			7)18477(4.	
			2639.	

Rép. $2639\frac{13}{21}$ rixdales, ou 2639 rixdales & 15 bons gros.

CHAPITRE X.

Des Rapports compoſés.

488.

On obtient des *rapports compoſés*, en multipliant par ordre les termes de deux ou de pluſieurs raiſons, les antécédens par les antécédens, & les conſéquens par les

conséquens ; & on dit alors que le rapport entre ces deux produits est *composé* des rapports donnés.

C'est ainsi que les rapports $a:b$, $c:d$, $e:f$ donnent le rapport composé $ace:bdf$ (*).

489.

Une raison restant toujours la même, quand, pour l'abréger, on divise ses deux termes par un même nombre, on peut faciliter beaucoup la composition ci-dessus en comparant les antécédens & les conséquens dans le dessein de faire de telles réductions, ainsi que nous l'avons fait dans le chapitre précédent.

Voici, par exemple, comment on trouve le rapport composé des rapports donnés qui suivent.

(*) Chacune de ces trois raisons est dite être une des *racines* de la raison composée.

Rapports donnés.

12:25, 28:33, & 55:56.

$$\cancel{1}\cancel{2},\cancel{4},2 : 5.\cancel{2}\cancel{5}.$$
$$\cancel{2}\cancel{8} : \cancel{1}\cancel{1}\,\cancel{3}\cancel{3}.$$
$$\cancel{5}\cancel{5}\,\cancel{5} : \cancel{2}\,\cancel{5}\cancel{6}.$$

$$2 : 5.$$

Donc 2:5 est la raison composée qu'on cherchoit.

490.

Le même procédé a lieu, quand il s'agit d'opérer en général sur des lettres ; & le cas le plus remarquable est celui où chaque antécédent est égal au conséquent de la raison précédente. Si les raisons données sont

$$a : b$$
$$b : c$$
$$c : d$$
$$d : e$$
$$e : a;$$

la raison composée est 1:1.

491.

On verra l'utilité de ces principes, en remarquant que deux champs quarrés ont entr'eux un tel rapport, composé des rapports des longueurs & des largeurs.

Soient, par exemple, les deux champs *A* & *B*; que *A* ait 500 pieds de longueur fur 60 pieds de largeur, & que la longueur de *B* foit de 360 pieds, & fa largeur de 100 pieds; le rapport des longueurs fera 500:360, & celui des largeurs 60:100. Ainfi l'on a

5̸0̸0̸,5 : 6,3̸6̸0̸.
6̸0̸ : 1̸0̸0̸.
―――――――――
5 : 6.

Donc le champ *A* eft au champ *B* comme 5 à 6.

492.

Autre exemple. Soit le champ *A* long de 720 pieds, large de 88 pieds; le champ *B* long de 660 pieds, & large de 90 pieds,

on compofera les rapports de la maniere qui fuit:

Rapport des long. 7̸2̸0̸,8 : 15,6̸0̸,6̸6̸0̸.
Rapport des larg. 8̸8̸ 8̸ 2 : 9̸0̸.
―――――――――
Rap. des champs *A* & *B* 16 : 15.

493.

De plus, s'il s'agit de comparer deux chambres relativement à l'efpace ou au contenu, on obfervera que ce rapport eft compofé de trois rapports; favoir, de celui des longueurs, de celui des largeurs & de celui des hauteurs. Soit, par exemple, la chambre *A*, dont la longueur =36 pieds, la largeur =16 pieds, & la hauteur =14 pieds; & la chambre *B*, dont la longueur =42 pieds, la largeur =24 pieds, & la hauteur =10 pieds; on aura ces trois rapports:

pour la longueur 3̸6̸,6̸ : 4̸2̸,7̸.
pour la largeur 1̸6̸,4̸,2 : 2̸4̸,4̸.
pour la hauteur 1̸4̸,2 : 1̸0̸,5.
―――――――――
4 : 5.

Ainſi le contenu de la chambre *A* eſt au contenu de la chambre *B* comme 4 à 5.

494.

Lorſque les raiſons qu'on compoſe de cette maniere ſont égales, il en réſulte des raiſons multiples. Savoir, deux raiſons égales donnent une *raiſon doublée* ou *quarrée*; trois raiſons égales produiſent la *raiſon triplée* ou *cubique*, & ainſi de ſuite. Par exemp. les raiſons $a:b$ & $a:b$ donnent la raiſon compoſée $aa:bb$; c'eſt pourquoi l'on dit que les quarrés ſont en raiſon doublée de leurs racines. Et le rapport $a:b$ multiplié trois fois, donnant le rapport $a^3:b^3$, on dit que les cubes ſont en raiſon triplée de leurs racines.

495.

On enſeigne dans la Géométrie que deux eſpaces circulaires ſont en raiſon doublée de leurs diametres; cela ſignifie qu'ils ſont l'un à l'autre dans le rapport des quarrés de leurs diametres.

Soit *A* un tel eſpace dont le diametre $=45$ pieds, & *B* un autre eſpace circulaire dont le diametre $=30$ pieds; le premier eſpace ſera au ſecond comme 45.45 à 30.30, ou, en compoſant ces deux raiſons égales,

$$\begin{array}{c} 45, 9, 3 : 30, 6, 2. \\ 45, 9, 3 : 30, 6, 2. \\ \hline 9 : 4. \end{array}$$

Donc ces deux aires ſont entr'elles comme 9 à 4.

496.

On démontre auſſi que les ſolidités des ſpheres ſont en raiſon cubique des diametres de ces globes. Ainſi le diametre d'un globe *A* étant 1 pied, & le diametre d'un globe *B* étant 2 pieds, la ſolidité de *A* ſera à celle de *B* comme $1^3:2^3$, ou comme 1 à 8.

Si donc ces ſpheres ſont d'une même matiere, la ſphere *B* peſera 8 fois autant que la ſphere *A*.

497.

On voit qu'on peut trouver par-là le poids des boulets de canon, leurs diametres & le poids d'un seul étant donnés. Soit, par exemple, le boulet *A* dont le diametre $=2$ pouces, & le poids $=5$ livres, & qu'on demande le poids d'un autre boulet dont le diametre seroit de 8 pouces, on aura cette proportion, $2^3 : 8^3 = 5$; au quatrieme terme, 320 liv. qui indique le poids du boulet *B*. On auroit pour un autre boulet *C*, dont le diametre seroit $=15$ pouces,

$2^3 : 15^3 = 5 : \ldots.$ *Rép.* $2109\frac{3}{8}$ liv.

498.

Quand on cherche le rapport de deux fractions, comme $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, on peut toujours l'exprimer en nombres entiers; car on n'a qu'à multiplier les deux fractions par bd, on obtiendra le rapport $ad:bc$ qui est égal à l'autre, & d'où résulte la proportion $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad:bc$. Si donc ad & bc ont des diviseurs

communs, le rapport pourra se réduire à de moindres termes. C'est ainsi que $\frac{15}{24} : \frac{25}{36} = 15.36 : 24.25 = 9 : 10$.

499.

On voudroit savoir encore quel est le rapport des fractions $\frac{1}{a}$ & $\frac{1}{b}$; il est clair qu'on aura $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$; ce qu'on exprime en disant que deux fractions qui ont l'unité pour numérateur, sont en raison *réciproque* ou *inverse* de leurs dénominateurs. On dit la même chose de deux fractions qui ont un même numérateur quelconque; car $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} = b : a$. Mais si deux fractions ont leurs dénominateurs égaux, comme $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$, elles sont en *raison directe* des numérateurs, savoir, comme $a:b$. Ainsi $\frac{3}{8} : \frac{3}{16} = \frac{6}{16} : \frac{3}{16} = 6:3 = 2:1$, & $\frac{10}{7} : \frac{15}{7} = 10:15$, ou $= 2:3$.

500.

On a remarqué dans la chute libre des corps, qu'un corps tombe de 15 pieds dans

une seconde, que dans deux secondes de temps il tombe de la hauteur de 60 pieds, & que dans trois secondes il tombe de 135 pieds; on en a conclu que les hauteurs sont entr'elles comme les quarrés des temps, & que réciproquement les temps sont en raison sous-doublée des temps, ou comme les racines quarrées des temps.

Si donc on demande combien de temps il faut à une pierre pour tomber de la hauteur de 2160 pieds; on aura 15:2160=1 au quarré du temps cherché. Ainsi le quarré du temps cherché est 144, & par conséquent le temps qu'on demande est 12 secondes.

501.

On demande combien de chemin, ou quelle hauteur, une pierre pourra parcourir en tombant pendant une heure de tems, c'est-à-dire en 3600 secondes? On dira donc, comme les quarrés des temps, c'est-à-dire $1^2 : 3600^2$; ainsi la hauteur donnée =15 pieds, à la hauteur cherchée.

1 : 12960000=15 :.... 194400000 haut[r]. cherchée.

$$\begin{array}{l} 15 \\ \hline 64800000 \\ 1296 \\ \hline 194400000. \end{array}$$

Si nous comptons maintenant 18000 pieds pour une lieue, nous trouverons cette hauteur de 10800, & par conséquent près de quatre fois plus grande que le diametre de la Terre.

502.

Il en est de même à l'égard du prix des pierres précieuses, lesquelles ne se vendent pas dans la proportion des poids; tout le monde sait que ces prix suivent un plus grand rapport. La regle pour les diamans est, que le prix est en raison quarrée du poids, c'est-à-dire que le rapport des prix est égal à la raison doublée des poids. On exprime le poids des diamans en carats, & un carat vaut 4 grains; si donc un dia-

mant d'un carat vaut 10 liv. un diamant de 100 carats vaudra autant de fois 10 livres, que le quarré de 100 est plus grand que 1 ; ainsi on aura, suivant la regle de trois,

$1^2 : \quad 100^2 = 10$ liv. :
ou $1 : 10000 = 10 : \ldots\ldots$ *Rép.* 100000 liv.

Il y a un diamant en Portugal qui pese 1680 carats ; son prix se trouvera donc en faisant

$1^2 : \quad 1680^2 = 10$ liv. : ..... ou
$1 : 2822400 = 10 : 28224000$ liv.

503.

Les postes fournissent assez d'exemples de rapports composés, parce qu'elles se payent en raison composée du nombre des chevaux & de celui des lieues ou des postes. Par exemple, un cheval se payant 20 sous par poste, qu'on veuille savoir ce qu'on aura à payer pour 28 chevaux & pour $4\frac{1}{2}$ postes ?

postes ? On écrira d'abord le rapport des
chevaux, — — — — — $1 : 28$,
sous ce rapport on mettra celui
des postes, — — — — $2 : 9$,
& composant les deux rapports,
on aura — — — — — $2 : 252$,
ou $1 : 126 = 1$ liv. à 126 fr. ou 42 écus.

Autre question. Si on paye un ducat pour huit chevaux par trois milles d'Allemagne, combien coûteront trente chevaux pour quatre milles ? On fera le calcul suivant :

$8\cancel{4} : \cancel{3}\cancel{0}, \cancel{1}\cancel{5}, 5.$
$\cancel{3} : \cancel{4}.$

$1 : 5 = 1$ duc. : au 4e. terme, qui sera 5 duc.

504.

La même composition des rapports se présente, quand il est question de payer des Ouvriers, puisque ces payemens suivent ordinairement la raison composée du nombre des Ouvriers & de celui des jours qu'on les a employés.

Si on donne, par exemple, 25 sous par jour à un Maçon, & qu'on demande ce qu'il faudra payer à vingt-quatre Maçons qui auront travaillé pendant 50 jours? On fera ce calcul:

1 : 24
1 : 50
1 : 1200 = 25 :..... 1500 francs
25
20)30000(1500.

Comme dans ces sortes d'exemples on a cinq données, on nomme dans les livres d'Arithmétique regle de cinq, celle qui sert à résoudre ces questions.

CHAPITRE XI.

Des Progressions géométriques.

505.

Une suite de nombres qui deviennent toujours un même nombre de fois plus grands ou plus petits, se nomme une *progression géométrique*, parce que chaque terme est constamment au suivant dans le même rapport géométrique. Et le nombre qui indique combien de fois chaque terme est plus grand que le précédent, s'appelle l'*exposant*. Ainsi, quand le premier terme est 1 & l'exposant = 2, la progression géométrique devient:

Termes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 &c.
Progr. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 &c.

les nombres 1, 2, 3 &c. marquant toujours les quantiemes termes de la progression.

506.

Si on suppose, en général, le premier terme $=a$ & l'exposant $=b$, on a la progression géométrique suivante:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ldots n.$$

$$\textit{Progr.}\ a, ab, ab^2, ab^3, ab^4, ab^5, ab^6, ab^7 \ldots ab^{n-1}.$$

Ainsi, quand cette progression est de n termes, le dernier terme est $=ab^{n-1}$. Il faut remarquer ici, que si l'exposant b est plus grand que l'unité, les termes augmentent continuellement; que si l'exposant $b=1$, les termes sont tous égaux; enfin, que si l'exposant b est plus petit que 1, ou qu'il ait une fraction, les termes décroissent sans cesse. Ainsi quand $a=1$ & $b=\frac{1}{2}$, on a cette progression géométrique:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \&c.$$

507.

Ici se présentent donc à considérer:

I.) Le premier terme que nous avons nommé a.

II.) L'exposant, que nous appellons b.

III.) Le nombre des termes, que nous avons indiqué par n.

IV.) Le dernier terme, que nous avons trouvé $=ab^{n-1}$.

Ainsi, quand les trois premieres de ces parties sont données, on trouve le dernier terme, en multipliant par le premier terme a la $n-1^e$ puissance de b, ou b^{n-1}.

Si on demandoit donc le 50e terme de la progression géométrique 1, 2, 4, 8, &c. on auroit $a=1$, $b=2$ & $n=50$; par conséquent le 50e terme $=2^{49}$. Or 2^9 étant $=512$; 2^{10} sera $=1024$. Donc le quarré de 2^{10}, ou 2^{20}, $=1048576$, & le quarré de ce nombre, ou 1099511627776 $=2^{40}$. Multipliant donc cette valeur de 2^{40} par 2^9 ou par 512, on a 2^{49} égalant 562949953421312.

508.

Une des principales questions qui se présentent dans cette matiere, c'est de trouver

la somme de tous les termes d'une progression géométrique; nous allons donc en expliquer la méthode. Soit donnée d'abord la progression suivante, composée de dix termes:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512,

dont nous indiquerons la somme par s, de sorte que:

$s = 1+2+4+8+16+32+64+128+256+512$, nous aurons, en prenant le double de part & d'autre, $2s = 2+4+8+16+32+64+128+256+1024$. Otant de ceci la progression indiquée par s, il reste $s = 1024 - 1 = 1023$; donc la somme cherchée $= 1023$.

509.

Supposons maintenant que dans la même progression le nombre des termes soit indéterminé & $= n$, de façon que la somme en question, ou s, soit $= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$, ... 2^{n-1}. Si on multiplie par 2, on a $2s = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \ldots 2^n$, & soustrayant de

cette égalité la précédente, on a $s = 2^n - 1$. On voit donc que la somme cherchée se trouve, en multipliant le dernier terme, 2^{n-1}, par l'exposant 2, afin d'avoir 2^n, & en soustrayant de ce produit l'unité.

510.

Cela devient encore plus clair par les exemples suivans, où nous substituerons successivement à n les nombres 1, 2, 3, 4, &c.

$1 = 1$; $1+2 = 3$; $1+2+4 = 7$; $1+2+4+8 = 15$; $1+2+4+8+16 = 31$; $1+2+4+8+16+32 = 63$, &c.

511.

On propose ordinairement dans cette matiere la question qui suit: Un homme propose de vendre son cheval par les cloux, qui sont au nombre de 32; il demande 1 liard pour le premier clou, 2 liards pour le second clou, 4 liards pour le troisieme clou, 8 liards pour le quatrieme, & ainsi

de suite, en demandant pour chaque clou le double du prix du précédent. On demande quel seroit le prix du cheval?

Cette question se réduit évidemment à trouver la somme de tous les termes de la progression géométrique 1, 2, 4, 8, 16, &c. continuée jusqu'au 32e terme. Or ce dernier terme est 2^{31}; & comme nous avons trouvé plus haut $2^{20}=1048576$, & $2^{10}=1024$, nous aurons $2^{20}.2^{10}=2^{30}$ égal à 1073741824; & en multipliant encore par 2, le dernier terme $2^{31}=2147483648$; en doublant donc ce nombre & en retranchant l'unité du produit, la somme cherchée devient 4294967295 liards. Ces liards font $1073741823\frac{3}{4}$ sous, & divisant par 20 on a 53687091 liv. 3 f. 9 den. pour le prix cherché.

512.

Soit à présent l'exposant $=3$, & qu'il s'agisse de trouver la somme de la progression géométrique 1, 3, 9, 27, 81, 243,

729, composée de 7 termes. Supposons-la pour un moment $=s$, de sorte que $s=1+3+9+27+81+243+729$.

Nous aurons, en multipliant par 3:
$3s=3+9+27+81+243+729+2187$.

Et soustrayant la série précédente, nous avons $2s=2187-1=2186$. Ainsi le double de la somme est $=2186$, & par conséquent la somme cherchée $=1093$.

513.

Soit dans la même progression le nombre des termes $=n$, & la somme $=s$; de sorte que $s=1+3+3^2+3^3+3^4+\ldots 3^{n-1}$. Si on multiplie par 3, on a $3s=3+3^2+3^3+3^4+\ldots 3^n$. Soustrayant de ceci la valeur de s, comme tous les termes de celle-ci, excepté le premier, détruisent tous les termes de la valeur de $3s$, excepté le dernier, on aura $2s=3^n-1$; donc $s=\frac{3^n-1}{2}$. Ainsi la somme cherchée se trouve en multipliant le dernier terme

par 3, en soustrayant 1 du produit, & en divisant le reste par 2. C'est ce qu'on voit aussi par les exemples suivans: $1=1$; $1+3 = \frac{3.3-1}{2} = 4$; $1+3+9 = \frac{3.9-1}{2} = 13$; $1+3+9+27 = \frac{3.27-1}{2} = 40$; $1+3+9+27+81 = \frac{3.81-1}{2} = 121$.

514.

Supposons maintenant, en général, le premier terme $=a$, l'exposant $=b$, le nombre des termes $=n$, & leur somme $=s$, en sorte que

$$s = a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots\ldots ab^{n-1}.$$

Si nous multiplions par b, nous avons

$$bs = ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + ab^5 + \ldots\ldots ab^n,$$

& soustrayant l'égalité précédente il reste $(b-1)s = ab^n - a$; d'où nous tirons facilement la somme cherchée $s = \frac{ab^n - a}{b-1}$. Par conséquent la somme d'une progression géométrique quelconque se trouve, si on multiplie le dernier terme par l'exposant de la progression, qu'on soustraie du produit le premier terme & qu'on divise le reste par l'exposant diminué de l'unité.

515.

Soit une progression géométrique de sept termes, dont le premier $=3$, & que l'exposant soit $=2$, on aura $a=3$, $b=2$ & $n=7$; donc le dernier terme $=3.2^6$, ou $3.64=192$; & la progression entiere sera

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192.

Si de plus on multiplie le dernier terme 192 par l'exposant 2, on a 384; ôtant le premier terme 3, il reste 381; & divisant ceci par $b-1$ ou par 1, on a 381 pour la somme de toute la progression.

516.

Soit encore une autre progression géométrique de six termes, que 4 en soit le premier, & que l'exposant soit $=\frac{3}{2}$. La progression est

$$4, 6, 9, \frac{27}{2}, \frac{81}{4}, \frac{243}{8}.$$

Multiplions ce dernier terme $\frac{243}{8}$ par l'exposant $\frac{3}{2}$, nous aurons $\frac{729}{16}$; la soustraction du premier terme 4 laisse le reste $\frac{665}{16}$, qui, divisé par $b - 1 = \frac{1}{2}$, donne $\frac{665}{8} = 83\frac{1}{8}$.

517.

Lorsque l'exposant est plus petit que 1, & que, par conséquent, les termes de la progression vont toujours en diminuant, on peut indiquer la somme d'une telle progression décroissante qui iroit à l'infini.

Soit, par exemple, le premier terme $= 1$, l'exposant $= \frac{1}{2}$, & la somme $= s$, en sorte que:

$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} +$, &c. sans fin.

Si on multiplie par 2, on a

$2s = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} +$, &c. sans fin.

Et soustrayant la progression précédente, il reste $s = 2$ pour la somme de la progression infinie proposée.

518.

Si le premier terme $= 1$, l'exposant $= \frac{1}{3}$, & la somme $= s$; de façon que

$s = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} +$, &c. à l'infini.

On multipliera le tout par 3, on aura

$3s = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} +$ &c. à l'infini;

& soustrayant la valeur de s, il reste $2s = 3$; donc la somme $s = 1\frac{1}{2}$.

519.

Qu'on ait une progression dont la somme $= s$, le premier terme $= 2$, l'exposant $= \frac{3}{4}$; de façon que

$s = 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128} +$, &c. à l'infini.

Multipliant par $\frac{4}{3}$ on aura $\frac{4}{3}s = \frac{8}{3} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128} +$, &c. sans fin. Or soustrayant la progression s, il reste $\frac{1}{3}s = \frac{8}{3}$; donc la somme cherchée $= 8$.

520.

Si on suppose, en général, le premier terme $= a$, & l'exposant de la progression

$=\frac{b}{c}$, de maniere que cette fraction soit plus petite que 1, & par conséquent c plus grand que b; voici comment on trouvera la somme de cette progression poussée à l'infini: on fera

$$s=a+\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{cc}+\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4}+, \&c.$$

sans fin.

Multipliant par $\frac{b}{c}$, on aura

$$\frac{b}{c}s=\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{c^2}+\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4}\ \&c.\ \text{à l'infini.}$$

Et soustrayant cette égalité de la précédente, il reste $(1-\frac{b}{c})s=a$.

Par conséquent $s=\dfrac{a}{1-\frac{b}{c}}$.

Si on multiplie les deux termes de cette fraction par c, on a $s=\frac{ac}{c-b}$. La somme de la progression géométrique infinie proposée se trouve donc en divisant le premier terme a par 1 moins l'exposant, ou bien en multipliant le premier terme a par le dénominateur de l'exposant, & en divisant le produit par le même dénominateur diminué du numérateur de l'exposant.

521.

On trouve de la même maniere les sommes des progressions, dont les termes sont affectés alternativement des signes + & —. Soit, par exemple,

$$s=a-\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{c^2}-\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4}-, \&c.$$

Si on multiplie par $\frac{b}{c}$, on a

$$\frac{b}{c}s=\frac{ab}{c}-\frac{ab^2}{c^2}+\frac{ab^3}{c^3}-\frac{ab^4}{c^4}\ \&c.$$

Et si on ajoute cette égalité à la précédente, on obtient $(1+\frac{b}{c})s=a$. D'où l'on tire la somme cherchée $s=\dfrac{a}{1+\frac{b}{c}}$, ou $s=\frac{ac}{c+b}$.

522.

On voit donc que si le premier terme $a=\frac{3}{5}$, & l'exposant $=\frac{2}{5}$, c'est-à-dire, $b=2$ & $c=5$, on trouvera la somme de la progression $\frac{3}{5}+\frac{6}{25}+\frac{12}{125}+\frac{24}{625}+\&c.=1$;

puisqu'en soustrayant l'exposant de 1 il restera $\frac{3}{5}$, & qu'en divisant le premier terme par ce reste, le quotient est 1.

On voit en second lieu que si les termes sont alternativement positifs & négatifs, & que la progression ait cette forme:

$$\frac{3}{5} - \frac{6}{25} + \frac{12}{125} - \frac{24}{625} + \&c.$$

la somme sera

$$\frac{a}{1+\frac{b}{c}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}.$$

523.

Autre exemple. Soit la progression infinie

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + \&c.$$

Le premier terme est ici $\frac{3}{10}$, & l'exposant est $\frac{1}{10}$. Soustrayant ce dernier de 1, il reste $\frac{9}{10}$; & si l'on divise le premier terme par cette fraction, il vient $\frac{1}{3}$ pour la somme de la progression donnée. Ainsi en ne prenant qu'un terme de la progression, savoir $\frac{3}{10}$, l'erreur seroit de $\frac{1}{30}$.

En prenant deux termes, $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} = \frac{33}{100}$, il

il s'en faudroit encore de $\frac{1}{300}$ que la somme ne fût $= \frac{1}{3}$.

524.

Autre exemple. Soit donnée la progression infinie:

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \&c.$$

Le premier terme est 9, l'exposant est $\frac{1}{10}$. Ainsi 1 moins l'exposant fait $\frac{9}{10}$; & $\frac{9}{\frac{9}{10}} = 10$, somme cherchée.

On remarquera que cette suite s'exprime par une fraction décimale en cette maniere, 9,9999999, &c.

CHAPITRE XII.

Des Fractions décimales infinies.

525.

NOUS avons vu plus haut que dans les calculs logarithmiques on emploie des fractions décimales au lieu des fractions ordi-

naires; cela se pratique aussi avec beaucoup d'avantage dans d'autres calculs. Il s'agira principalement de faire voir comment on transforme une fraction ordinaire en une fraction décimale, & comment on peut exprimer réciproquement la valeur d'une fraction décimale par une fraction ordinaire.

526.

Qu'on ait généralement à changer en fraction décimale la fraction $\frac{a}{b}$: comme cette fraction exprime le quotient de la division du numérateur a par le dénominateur b, on écrira à la place de a la formule $a{,}0000000$, dont la valeur ne differe pas du tout de celle de a, puisqu'elle ne contient ni dixiemes, ni centiemes &c. On divisera ensuite cette formule par le nombre b, suivant les regles ordinaires de la division, & en observant seulement de mettre à la place convenable la virgule qui sépare les décimales & les entiers. Voilà tout le procédé,

& nous allons l'éclaircir par quelques exemples.

Soit donnée d'abord la fraction $\frac{1}{2}$, la division en décimales prendra cette forme:

$$\frac{2)\,1{,}0000000}{0{,}5000000} = \frac{1}{2}.$$

Nous voyons par-là que $\frac{1}{2}$ est autant que $0{,}5000000$ ou que $0{,}5$; & en effet cela est évident, puisque cette fraction décimale indique $\frac{5}{10}$, qui équivalent à $\frac{1}{2}$.

527.

Que $\frac{1}{3}$ soit la fraction donnée, on aura

$$\frac{3)\,1{,}0000000}{0{,}3333333} = \frac{1}{3}.$$

Cela fait voir que la fraction décimale, dont la valeur $= \frac{1}{3}$, ne peut, à la rigueur, être discontinuée nulle part, & qu'elle va à l'infini en conservant toujours le nombre 3. Aussi avons-nous trouvé plus haut que les fractions $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}$, &c. à l'infini, ajoutées ensemble font $\frac{1}{3}$.

La fraction décimale qui exprime la valeur de $\frac{2}{3}$, se continue de même à l'infini, car on a

$$\frac{3)2{,}0000000}{1{,}6666666} = \frac{2}{3}.$$

Et cela suit d'ailleurs évidemment de ce que nous venons de dire, parce que $\frac{2}{3}$ est le double de $\frac{1}{3}$.

528.

Si $\frac{1}{4}$ est la fraction proposée, on a

$$\frac{4)1{,}0000000}{0{,}2500000} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi $\frac{1}{4}$ est autant que 0,2500000 ou que 0,25 ; & cela est clair, puisque $\frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

On auroit pareillement pour la fraction $\frac{3}{4}$

$$\frac{4)3{,}0000000}{0{,}7500000} = \frac{3}{4}.$$

Ainsi $\frac{3}{4} = 0{,}75$; & en effet $\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

La fraction $\frac{5}{4}$ se change en fraction décimale, en faisant

$$\frac{4)5{,}0000000}{1{,}2500000} = \frac{5}{4}.$$

Or $1 + \frac{25}{100} = \frac{5}{4}$.

529.

On trouvera de la même maniere $\frac{1}{5} = 0{,}2$; $\frac{2}{5} = 0{,}4$; $\frac{3}{5} = 0{,}6$; $\frac{4}{5} = 0{,}8$; $\frac{5}{5} = 1$; $\frac{6}{5} = 1{,}2$, &c.

Quand le dénominateur est 6, on trouve $\frac{1}{6} = 0{,}1666666$ &c. ce qui est autant que $0{,}666666 - 0{,}5$. Or $0{,}666666 = \frac{2}{3}$ & $0{,}5 = \frac{1}{2}$, donc en effet $0{,}1666666 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

On trouve aussi $\frac{2}{6} = 0{,}333333$ &c. $= \frac{1}{3}$; mais $\frac{3}{6}$ devient $0{,}5000000 = \frac{1}{2}$. Ensuite $\frac{5}{6} = 0{,}833333 = 0{,}333333 + 0{,}5$, c'est-à-d. $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

530.

Lorsque le dénominateur est 7, les fractions décimales deviennent plus compliquées. Par exemp. on trouve $\frac{1}{7} = 0{,}142857$ &c. cependant il faut remarquer que ces six chiffres 142857 reviennent constam-

ment. Pour ſe convaincre donc que cette fraction décimale exprime préciſément la valeur de $\frac{1}{7}$, on peut la transformer en une progreſſion géométrique, dont le premier terme ſoit $=\frac{142857}{1000000}$, & l'expoſant $=\frac{1}{1000000}$; & par conſéquent la ſomme $=\frac{\frac{142857}{1000000}}{1-\frac{1}{1000000}}$ $=\frac{142857}{999999}$ (en multipliant les deux termes par 1000000) $=\frac{1}{7}$.

531.

On peut prouver encore d'une maniere plus facile, que la fraction décimale trouvée fait exactement $\frac{1}{7}$; car poſant pour ſa valeur la lettre $ſ$, on a

$$ſ=0,142857142857142857 \text{ \&c.}$$
$$10ſ=1,42857142857142857 \text{ \&c.}$$
$$100ſ=14,2857142857142857 \text{ \&c.}$$
$$1000ſ=142,857142857142857 \text{ \&c.}$$
$$10000ſ=1428,57142857142857 \text{ \&c.}$$
$$100000ſ=14285,7142857142857 \text{ \&c.}$$
$$1000000ſ=142857,142857142857 \text{ \&c.}$$
Souſtrayez $ſ= \quad 0,142857142857 \text{ \&c.}$

$$999999ſ=142857.$$

Et diviſant par 999999, vous aurez $ſ=\frac{142857}{999999}=\frac{1}{7}$. Donc la fraction décimale, qu'on avoit fait $=ſ$, eſt $=\frac{1}{7}$.

532.

On transformera de la même maniere $\frac{2}{7}$ en une fraction décimale, qui ſera 0,28571428 &c. & cela nous conduit à trouver plus facilement la valeur de la fraction décimale que nous venons de ſuppoſer $=ſ$; parce que 0,28571428, &c. doit être le double de celle-là, & par conſéquent $=2ſ$. Car nous avons eu

$$100ſ=14,28571428571 \text{ \&c.}$$
ainſi en ſouſtrayant $2ſ= 0,28571428571 \text{ \&c.}$

il reſte $98ſ=14$

donc $ſ=\frac{14}{98}=\frac{1}{7}$.

On trouve auſſi $\frac{3}{7}=0,42857142857$ &c. ce qui, après notre ſuppoſition, doit être $=3ſ$; or nous avons trouvé

$$10ſ=1,42857142857, \text{ \&c.}$$
ainſi en ſouſtrayant $3ſ=0,42857142857$, &c.

nous avons $7ſ=1$, donc $ſ=\frac{1}{7}$.

533.

Ainsi quand une fraction proposée a le dénominateur 7, la fraction décimale est infinie, & 6 chiffres y sont continuellement répétés. La raison en est, comme il est facile de s'en appercevoir, qu'en continuant la division il faut qu'on revienne tôt ou tard à un résidu qu'on aura déjà eu. Or il ne peut rester dans cette division que 6 nombres différens, savoir 1, 2, 3, 4, 5, 6; ainsi, après la sixieme division au plus tard, il faut que les mêmes chiffres reviennent; mais lorsque le dénominateur est de nature à faire parvenir à une division sans reste, ces cas-là ne peuvent avoir lieu.

534.

Supposons à présent que 8 soit le dénominateur de la fraction proposée, on trouvera les fractions décimales qui suivent:

$\frac{1}{8}=0,125$; $\frac{2}{8}=0,250$; $\frac{3}{8}=0,375$;
$\frac{4}{8}=0,500$; $\frac{5}{8}=0,625$; $\frac{6}{8}=0,750$;
$\frac{7}{8}=0,875$, &c.

535.

Si le dénominateur est 9, on a $\frac{1}{9}=0,111$ &c. $\frac{2}{9}=0,222$ &c. $\frac{3}{9}=0,333$ &c.
Si le dénominateur est 10, on a $\frac{1}{10}=0,100$; $\frac{2}{10}=0,200$; $\frac{3}{10}=0,3$. Cela est clair par la nature de la chose, de même que $\frac{1}{100}=0,01$; que $\frac{37}{100}=0,37$; que $\frac{256}{1000}=0,256$; que $\frac{24}{10000}=0,0024$, &c.

536.

Que 11 soit le dénominateur de la fraction proposée, on aura $\frac{1}{11}=0,0909090$, &c. Or supposons qu'on veuille trouver la valeur de cette fraction décimale, & nommons-la s, nous aurons $s=0,090909$, & $10s=00,909090$; de plus, $100s=9,09090$. Si donc nous soustrayons de ceci la valeur de s, nous aurons $99s=9$, & par conséquent $s=\frac{9}{99}=\frac{1}{11}$. Nous aurons aussi $\frac{2}{11}=0,181818$, &c. $\frac{3}{11}=0,272727$, &c. $\frac{6}{11}=0,545454$ &c.

537.

Il est donc un grand nombre de fractions décimales, où un, deux ou plusieurs chiffres reviennent constamment, & qui continuent de cette maniere jusqu'à l'infini. De telles fractions sont assez remarquables, & nous allons faire voir comment on peut trouver aisément leurs valeurs (*).

(*) Ces fractions décimales périodiques fournissent matiere à plusieurs recherches intéressantes; j'avois commencé à m'en occuper, même avant que d'avoir vu cette *Algebre*, & j'aurois peut-être continué, si je n'attendois aussi l'occasion de voir un Mémoire inséré dans les *Transactions philosophiques* pour 1769, & intitulé *of the Theory of circulating Fractions*. Je me contenterai de rapporter ici le raisonnement par lequel j'avois commencé.

Soit $\frac{N}{D}$ une fraction réelle quelconque irréductible à de moindres termes; on demande jusqu'à combien de chiffres il faudra la réduire en décimales, avant que les mêmes termes ou chiffres reviennent. Je suppose que $10\,N$ soit plus grand que D; si cela n'étoit pas, mais que $100\,N$ ou $1000\,N$ seulement fût $> D$, il faudroit commencer par voir si $\frac{10N}{D}$ ou $\frac{100N}{D}$ &c. se réduit à de moindres termes, ou à une fraction $\frac{N'}{D'}$.

Supposons d'abord qu'un seul chiffre soit toujours répété, & indiquons-le par a, de sorte que $s = 0,aaaaaaa$. Nous avons

$$10s = a,aaaaaaa,$$

& soustrayant $s = 0,aaaaaaa$

nous aurons $9s = a$; donc $s = \frac{a}{9}$.

Cela posé, je dis que la même période ne peut revenir que lorsque dans la division continuelle qu'on fait, le même résidu N revient. Supposons que jusqu'alors on ait ajouté s zéros, & que Q soit le nombre du quotient en entier, & abstraction faite de la virgule, on aura $\frac{N \times 10^s}{D} = Q + \frac{N}{D}$; donc $Q = \frac{N}{D} \times (10^s - 1)$. Or Q devant être un nombre entier, il s'agit de déterminer pour s le plus petit nombre entier, tel que $\frac{N}{D} \times (10^s - 1)$, ou seulement que $\frac{10^s - 1}{D}$ soit un nombre entier.

Ce problême demande qu'on distingue différens cas: le premier est celui où D est un diviseur de 10, ou de 100 ou de 1000 &c. & il est clair que dans ce cas aucune fraction périodique ne peut avoir lieu. Nous prendrons pour le second cas celui où D est un nombre impair, & qui ne soit pas un facteur d'une puissance de 10; dans ce cas la valeur de s peut aller jusqu'à $D-1$, mais souvent elle est moindre. Un troisieme cas enfin est celui où D est pair, & où par conséquent, sans être un facteur d'une puissance de 10, il a cependant un

Lorsque deux chiffres sont répétés, comme ab, on a $s = 0,abababa$. Donc $100s = ab,ababab$; & si on en soustrait s, il reste $99s = ab$; par conséquent $s = \frac{ab}{99}$.

Lorsque trois chiffres, comme abc, se trouvent répétés, on a $s = a,abcabcabc$; par conséquent $1000s = abc,abcabc$; & en soustrayant s, il reste $999s = abc$; donc $s = \frac{abc}{999}$, & ainsi de suite.

538.

Toutes les fois donc qu'une fraction décimale de cette espece se présente, il est facile d'en trouver la valeur. Soit donnée, par exemple, celle-ci, 0,296296, sa valeur sera $= \frac{296}{999} = \frac{8}{27}$, en divisant les deux termes par 37.

commun diviseur avec une de ces puissances. Ce commun diviseur ne peut être qu'un nombre de la forme 2^c; si donc $\frac{D}{2^c} = d$, je dis que les périodes seront les mêmes que pour la fraction $\frac{N}{d}$, mais qu'elles ne commenceront qu'au chiffre désigné par c. Ainsi ce cas revient au second cas, & il est évident au reste que c'est celui-ci qui fait l'essentiel de cette théorie.

Cette fraction doit redonner la fraction décimale proposée; & on peut se convaincre facilement que ce résultat a lieu en effet, en divisant 8 par 9, & après cela le quotient par 3, parce que $27 = 3.9$. On a

9)8,0000000
3)0,8888888
0,2962962 &c.

ce qui est la fraction décimale proposée.

539.

Donnons encore un exemple assez curieux, en changeant en fraction décimale la fraction $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$, ce qui se fait de la maniere qu'on va voir:

2)1,00000000000000
3)0,50000000000000
4)0,16666666666666
5)0,04166666666666
6)0,00833333333333
7)0,00138888888888
8)0,00019841269841
9)0,00002480158730
10)0,00000275573192
0,00000027557319.

CHAPITRE XIII.

Des Calculs d'intérêts (*).

540.

On a coutume d'exprimer les intérêts d'un capital en *pourcents*, en disant combien on paie annuellement d'intérêt de la somme de 100. Il est assez ordinaire qu'on place son capital à 5 pour cent, c'est-à-dire,

(*) La théorie du calcul de l'intérêt doit ses premiers progrès à *Leibnitz*, qui en donna les principaux élémens dans les *Acta Eruditorum* de Leipsig pour 1683. Elle a fourni matiere ensuite à plusieurs dissertations détachées très-intéressantes; ceux qui l'ont le plus avancée, sont les Mathématiciens qui ont travaillé sur l'Arithmétique politique, dans laquelle on combine d'une maniere véritablement utile le calcul des probabilités, le calcul de l'intérêt & les données que fournissent depuis environ un siecle les régîtres mortuaires. De bons élémens d'Arithmétique politique nous manquent encore, quoique cette branche des Mathématiques, aussi belle qu'étendue, ait été fort cultivée en Angleterre, en France & en Hollande.

de maniere qu'on tire 5 écus d'intérêt d'un capital de 100 écus. Ainsi rien de plus facile que de calculer les intérêts d'un capital quelconque: on n'a qu'à dire, suivant la regle de trois:

100 donnent 5; que donne le capital proposé? Soit, par exemple, le capital 860 écus, on trouve son intérêt annuel, en disant:

$100:5 = 860$ à.... *Rép.* 43 écus.

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 100)4300 \\ \hline 43. \end{array}$$

541.

Nous ne nous arrêterons pas à ces calculs de l'intérêt simple, afin de passer aussi-tôt au calcul de l'*intérêt sur intérêt*. On demande principalement dans ce calcul, à quelle somme monte un capital donné après un certain nombre d'années, si on joint annuellement l'intérêt au capital, & que de cette maniere on augmente continuellement

le capital? On part, pour résoudre cette question, de ce que 100 écus placés à 5 pour cent se changent au bout d'une année en un capital de 105 écus. Soit le capital $=a$, on trouvera ce qu'il vaut au bout de l'année, en disant: 100 donne 105, que donne a; la réponse est $\frac{105a}{100} = \frac{21a}{20}$, ce que l'on peut aussi écrire de cette maniere, $\frac{21}{20}.a$, ou de celle-ci, $a + \frac{1}{20}.a$.

542.

Ainsi, quand on ajoute au capital actuel sa vingtieme partie, on obtient la valeur du capital pour l'année prochaine. Ajoutant à celui-ci son vingtieme, on sait ce que vaut le capital donné après deux ans, & ainsi de suite. Il est donc facile d'apprécier les accroissemens successifs & annuels du capital, & de continuer ce calcul aussi loin qu'on voudra.

543.

Supposons un capital qui soit présentement de 1000 écus, qu'il soit placé à cinq pour

pour cent, & qu'on joigne chaque année l'intérêt au capital. Comme ce calcul ne tarde pas à conduire à des fractions, nous nous servirons des fractions décimales, mais sans les pousser plus loin que jusqu'aux milliemes parties d'un écu, vu que des parties plus petites n'entrent pas ici en considération.

Le capital donné de 1000 écus vaudra

après 1 an — — —	1050 écus
	52,5,
après 2 ans — — —	1102,5
	55,125,
après 3 ans — — —	1157,625
	57,881,
après 4 ans — — —	1215,506
	60,775,
après 5 ans — — —	1276,281 &c.

544.

On peut continuer de la même maniere pour autant d'années qu'on voudra; mais lorsque le nombre des années est fort grand, le calcul devient long & ennuyeux; voici comment on peut l'abréger:

Soit le capital présent $=a$, & puisqu'un capital de 20 écus vaut 21 écus au bout de l'année, le capital a vaudra $\frac{21}{20}a$ après un an. Le même capital montera l'année suivante à $\frac{21^2}{20^2}.a=\left(\frac{21}{20}\right)^2.a$. Ce capital de deux ans vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^3.a$ l'année d'après; ce qui sera donc le capital de trois ans. Celui-ci augmentant de même, le capital donné vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^4.a$ au bout de quatre ans. Il vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^5.a$ au bout de cinq ans. Après un siecle il vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}.a$; & en général $\left(\frac{21}{20}\right)^n.a$ sera la valeur de ce capital après n années; & cette formule servira à déterminer la quantité du capital après un nombre quelconque d'années.

545.

La fraction $\frac{21}{20}$ qui est entrée dans ce calcul, se fonde sur ce que les intérêts ont été comptés à 5 pour cent, & que $\frac{21}{20}$ est autant que $\frac{105}{100}$. Que si les intérêts se comptoient à 6 pour cent, le capital a monteroit à $\left(\frac{106}{100}\right).a$ au bout d'un an; à $\left(\frac{106}{100}\right)^2.a$ au bout de deux ans; & à $\left(\frac{106}{100}\right)^n.a$ au bout de n années.

Mais si les intérêts ne sont que de 4 pour cent, le capital a ne vaudra que $\left(\frac{104}{100}\right)^n.a$ après n ans.

546.

Or il est aisé, lorsque le capital a, ainsi que le nombre des années, est donné, de résoudre ces formules par les logarithmes. Car s'il est question de celle que nous avons trouvée dans la premiere supposition, on prendra le logarithme de $\left(\frac{21}{20}\right)^n.a$, qui est $=\log.\left(\frac{21}{20}\right)^n+\log.a$; parce que la formule en question est le produit de $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ & de a. Et comme $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ est une puissance, on aura $L.\left(\frac{21}{20}\right)^n=nL.\frac{21}{20}$. Ainsi le logarithme du capital cherché est $=n.L.\frac{21}{20}$

$+$L.a. De plus le logarithme de la fraction $\frac{21}{20}$ = L. 21 — L. 20.

547.

Soit à préſent le capital = 1000 écus, & qu'on demande de combien il ſera au bout de 100 ans, en comptant les intérêts à 5 pour cent?

Nous avons ici n = 100. Le logarithme du capital cherché ſera par conſéquent = 100 L. $\frac{21}{20}$ + L. 1000, & voici comment on évalue cette quantité:

L. 21 = 1,3222193
ſouſtrayant L. 20 = 1,3010300
L. $\frac{21}{20}$ = 0,0211893
multipliant par 100
100 L. $\frac{21}{20}$ = 2,1189300
ajoutant L. 1000 = 3,0000000
logarithme du capital cherché. = 5,1189300

On voit par la caractériſtique de ce logarithme, que le capital cherché ſera un nombre de ſix chiffres, & en effet ce capital ſe trouve = 131501 écus.

548.

Un capital de 3452 livres à 6 pour cent, de combien ſera-t il après 64 ans?

Nous avons ici a = 3452, & n = 64. Donc le logarithme du capital cherché = 64 L. $\frac{53}{50}$ + L. 3452, ce qu'on calcule de cette maniere:

L. 53 = 1,7242759
ſouſtrayant L. 50 = 1,6989700
L. $\frac{53}{50}$ = 0,0253059
multipl. par 64: 64 L. $\frac{53}{50}$ = 1,6195776
L. 3452 = 3,5380708
5,1576484.

Et en prenant le nombre de ce logarithme, on trouve le capital cherché égal à 143763 livres.

549.

Quand le nombre des années eſt fort grand, comme il s'agit de multiplier ce

nombre par le logarithme d'une fraction, il pourroit provenir une assez grande erreur de ce que les logarithmes ne se trouvent calculés dans les tables que jusqu'à 7 chiffres de décimales. C'est pourquoi il faudra employer des logarithmes poussés à un plus grand nombre de figures, comme on l'a fait dans l'exemple suivant:

Un capital d'un écu restant placé à 5 pour cent pendant 500 ans, & les intérêts s'y joignant annuellement, on demande à quelle somme se montera ce capital après les 500 années?

On a ici $a=1$ & $n=500$; par conséquent le logarithme du capital cherché est égal à $500\,L.\frac{21}{20}+L.1$, ce qui produit ce calcul:

	L. 21 =	1,3222192947333919
soustrayant	L. 20 =	1,3010299956663981
	L. $\frac{21}{20}$ =	0,0211892990669938
mult. par 500 on a		10,5946495334969000

Voilà donc le logarithme du capital cherché, lequel sera par conséquent égal à 39323200000 écus.

550.

Si on ne se contentoit pas de joindre annuellement l'intérêt au capital, & qu'on voulût encore l'augmenter tous les ans d'une nouvelle somme $=b$, le capital actuel que nous nommerons a, s'accroîtroit chaque année de la maniere qu'on verra:

après 1 an $\frac{21}{20}a+b$,

après 2 ans $(\frac{21}{20})^2a+\frac{21}{20}b+b$,

après 3 ans $(\frac{21}{20})^3a+(\frac{21}{20})^2b+\frac{21}{20}b+b$,

après 4 ans $(\frac{21}{20})^4a+(\frac{21}{20})^3b+(\frac{21}{20})^2b$
$+(\frac{21}{20})b+b$,

après n ans $(\frac{21}{20})^na+(\frac{21}{20})^{n-1}b+(\frac{21}{20})^{n-2}b$
$+\ldots\ldots\frac{21}{20}b+b$.

Ce capital consiste, comme on voit, en deux parties, dont la premiere $=(\frac{21}{20})^na$, & dont l'autre prise à rebours forme la série $b+\frac{21}{20}b+(\frac{21}{20})^2b+(\frac{21}{20})^3b+\ldots.(\frac{21}{20})^{n-1}b$. Cette suite est évidemment une progression géométrique, dont l'exposant est egal à $\frac{21}{20}$.

Nous en chercherons donc la ſomme, en multipliant d'abord le dernier terme $\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1}b$ par l'expoſant $\frac{21}{20}$; nous aurons $\left(\frac{21}{20}\right)^{n}b$. Souſtrayant enſuite le premier terme b, il reſte $\left(\frac{21}{20}\right)^{n}b-b$; & diviſant enfin par l'expoſant moins 1, c'eſt-à-dire par $\frac{1}{20}$, nous trouverons la ſomme cherchée $=20\left(\frac{21}{20}\right)^{n}b-20b$; donc le capital cherché eſt, $\left(\frac{21}{20}\right)^{n}a+20\left(\frac{21}{20}\right)^{n}b-20b=\left(\frac{21}{20}\right)^{n}.(a+20b)-20b$.

551.

Le développement de cette formule exige qu'on calcule ſéparément ſon premier terme $\left(\frac{21}{20}\right)^{n}.(a+20b)$; ce qui ſe fait en prenant ſon logarithme, qui eſt $n\text{L}.\frac{21}{20}+\text{L}.(a+20b)$; car le nombre qui répond à ce logarithme dans les tables, ſera la valeur de ce premier terme. Si l'on ſouſtrait enſuite $20b$ de cette quantité, on connoît le capital cherché.

552.

Queſtion. Quelqu'un a un capital de 1000 écus placé à cinq pour cent, il y ajoute annuellement 100 écus outre les intérêts, on demande la valeur de ce capital au bout de vingt-cinq ans?

Nous avons ici $a=1000$; $b=100$; $n=25$; voici donc le plan de l'opération:

$$\text{L}.\frac{21}{20}=0,021189299.$$

Multipliant par 25 on a

$$25\,\text{L}.\frac{21}{20}=0,5297324750$$
$$\text{L}.(a+20b)=3,4771213135$$
$$=4,0068537885.$$

Ainſi la premiere partie, ou le nombre qui répond à ce logarithme, eſt 10159,1 écus, & ſi on en ſouſtrait $20b=2000$, on trouve que le capital en queſtion vaudra, après vingt-cinq ans, 8159,1 écus.

553.

Puis donc que ce capital de 1000 écus va toujours en augmentant, & qu'après

vingt-cinq ans il se monte à $8159\frac{1}{10}$ écus, on peut faire la question, en combien d'années il montera jusqu'à 1000000 écus.

Soit n ce nombre d'années, & puisque $a=1000$, $b=100$, le capital sera au bout de n ans:

$\left(\frac{21}{20}\right)^n(3000)-2000$, somme qui doit faire 1000000 d'écus; de-là résulte donc cette égalité ou équation:

$$3000\left(\frac{21}{20}\right)^n-2000=1000000.$$

Ajoutant des deux côtés 2000, on a

$$3000\left(\frac{21}{20}\right)^n=1002000.$$

Divisant de part & d'autre par 3000, il vient $\left(\frac{21}{20}\right)^n=334$.

Prenant les logarithmes, on a $n\,\mathrm{L}.\frac{21}{20}=\mathrm{L}.334$; & divisant par $\mathrm{L}.\frac{21}{20}$, on obtient $n=\frac{\mathrm{L}.334}{\mathrm{L}.\frac{21}{20}}$. Or $\mathrm{L}.334=2{,}5237465$, & $\mathrm{L}.\frac{21}{20}=0{,}0211893$; donc $n=\frac{2{,}5237465}{0{,}0211893}$. Et si l'on multiplie enfin les deux termes de cette fraction par 10000000, on aura $n=\frac{25237465}{211893}$, ce qui fait cent dix-neuf ans

un mois sept jours, & c'est là le temps après lequel le capital de 1000 écus se sera accru jusqu'à 1000000 d'écus.

554.

Mais si on supposoit que quelqu'un, au lieu d'augmenter annuellement son capital d'une certaine somme fixe, le diminuât en employant, chaque année, une certaine somme pour son entretien, on auroit les gradations suivantes pour les valeurs de ce capital a, année par année, en le supposant placé à 5 pour cent, & en entendant par b la somme qu'on en ôte annuellement:

après 1 an, $\frac{21}{20}a-b$,

après 2 ans, $\left(\frac{21}{20}\right)^2a-\frac{21}{20}b-b$,

après 3 ans, $\left(\frac{21}{20}\right)^3a-\left(\frac{21}{20}\right)^2b-\frac{21}{20}b-b$,

après n ans, $\left(\frac{21}{20}\right)^na-\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1}b-\left(\frac{21}{20}\right)^{n-2}b$ $\ldots\ldots-\left(\frac{21}{20}\right)b-b$.

555.

Ce capital consiste donc en deux parties, l'une est $\left(\frac{21}{20}\right)^na$, & l'autre qui doit en être

soustraite forme, en prenant les termes en rétrogradant, la progression géométrique suivante:

$$b+\left(\tfrac{21}{20}\right)b+\left(\tfrac{21}{20}\right)^2 b+\left(\tfrac{21}{20}\right)^3 b+\ldots\left(\tfrac{21}{20}\right)^{n-1}b.$$

Nous avons déjà trouvé ci-dessus la somme de cette progression $=20\left(\tfrac{21}{20}\right)^n b-20b$; si donc on soustrait cette quantité de $\left(\tfrac{21}{20}\right)^n a$, on aura le capital cherché, après n ans, $=\left(\tfrac{21}{20}\right)^n(a-20b)+20b$.

556.

On auroit pu tirer aussi cette formule immédiatement de la précédente. Car de même qu'on ajoutoit, dans la supposition précédente, annuellement la somme b, on ôte à présent chaque année la même somme b. On n'a donc qu'à mettre dans la formule précédente, par-tout $-b$ à la place de $+b$. Il faut remarquer principalement ici que, si $20b$ est plus grand que a, la premiere partie devient négative, & par conséquent que le capital va toujours en

diminuant. Cela se comprend aisément, car si on ôte plus du capital annuellement qu'il ne s'y joint d'argent en intérêts, il est clair que ce capital doit devenir continuellement plus petit, & qu'à la fin il doit même se réduire absolument à rien. C'est ce que nous allons éclaircir par un exemple.

557.

Question. Quelqu'un a un capital de 100000 écus placé à 5 pour cent; il lui faut chaque année 6000 écus pour son entretien; cela fait plus que les intérêts de son argent, lesquels ne se montent qu'à 5000 écus; par conséquent le capital ira toujours en diminuant. On demande en combien de temps il s'évanouira tout-à-fait. Supposons ce nombre d'années $=n$, & puisque $a=100000$ & $b=6000$, nous savons que après n ans la valeur du capital sera $=-20000\left(\tfrac{21}{20}\right)^n+120000$, ou $120000-20000\left(\tfrac{21}{20}\right)^n$. Ainsi le capital se réduira à zéro, lorsque $20000\left(\tfrac{21}{20}\right)^n$ se montera à

120000 écus, ou lorsque $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$ égalera 120000. Divisant des deux côtés par 20000, on a $\left(\frac{21}{20}\right)^n = 6$. Prenant les logarithmes, on a $n \,\mathrm{L}.\frac{21}{20} = \mathrm{L}.6$. Divisant par $\mathrm{L}.\frac{21}{20}$, il vient $n = \frac{\mathrm{L}.6}{\mathrm{L}.\frac{21}{20}} = \frac{0,7781513}{0,0211893}$, ou $n = \frac{7781513}{211893}$. Donc $n = 36$ ans 8 mois 22 jours, au bout duquel temps il ne restera plus rien du capital.

558.

Il sera bon de faire voir aussi comment, en partant des mêmes principes, on peut calculer les intérêts pour des temps plus courts que des années entieres. On se sert pour cela de la formule $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$ trouvée plus haut, qui exprime la valeur d'un capital placé à 5 pour cent après n années; car si le temps est de moins d'un an, l'exposant n devient une fraction, & le calcul se fait par les logarithmes comme auparavant. Si on demandoit, par exemple, la valeur du capital après un jour, on feroit $n = \frac{1}{365}$;

si c'est après deux jours, $n = \frac{2}{365}$, & ainsi de suite.

559.

Soit le capital $a = 100000$ écus, placé à 5 pour cent, à combien montera-t-il en huit jours de temps?

Nous avons $a = 100000$, & $n = \frac{8}{365}$, par conséquent le capital cherché $= \left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}}$ 100000. Le logarithme de cette quantité est $= \mathrm{L}.\left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} + \mathrm{L}.\,100000 = \frac{8}{365}\,\mathrm{L}.\frac{21}{20} + \mathrm{L}.\,100000$. Or $\mathrm{L}.\frac{21}{20} = 0,0211893$,

multipliant par $\frac{8}{365}$ on a 0,0004644
ajoutant L. 100000 = 5,0000000
la somme est = 5,0004644.

Le nombre de ce logarithme se trouve $= 100107$. Ainsi dans les premiers huit jours les intérêts du capital font déjà 107 écus.

560.

Dans cette matiere se présentent aussi les questions d'estimer la valeur présente d'une

ſomme d'argent qui ne ſeroit payable que dans quelques années. On conſidérera que, puiſque 20 écus en argent comptant montent à 21 écus en douze mois, il faut que réciproquement 21 écus qu'on ne pourroit toucher qu'au bout d'un an, ne valent actuellement que 20 écus. Si donc on exprime par a une ſomme dont le payement écherroit au bout d'un an, la valeur préſente de cette ſomme eſt $\frac{20}{21}a$. Ainſi pour trouver combien un capital a, payable ſeulement au bout d'un certain temps, vaudroit une année plutôt, il faudra le multiplier par $\frac{20}{21}$; pour trouver ſa valeur deux ans avant l'échéance, on le multipliera par $(\frac{20}{21})^2 a$; & en général ſa valeur, n ans avant l'échéance, s'exprimera par $(\frac{20}{21})^n a$.

561.

Suppoſons qu'un homme ait à tirer pendant cinq années conſécutives une rente annuelle de cent écus, & qu'il veuille la céder pour de l'argent comptant, en comptant

tant les intérêts à 5 pour cent, ſi on demande combien il doit recevoir, voici comment il faudra raiſonner:

Pour 100 écus qui échoient

après 1 an il reçoit 95,239.
après 2 ans ——— 90,704.
après 3 ans ——— 86,385.
après 4 ans ——— 82,272.
après 5 ans ——— 78,355.
ſomme des 5 termes 432,955.

Ainſi le Poſſeſſeur de la rente ne peut prétendre en argent comptant que 432,955 écus, ou 1298 livres 17 ſous $3\frac{3}{5}$ deniers.

562.

On remarquera que ſi une telle rente devoit durer un nombre d'années beaucoup plus grand, le calcul, de la maniere que nous l'avons fait, deviendroit très-pénible, voici les moyens de le faciliter:

Soit la rente annuelle $= a$, commençant dès-à-préſent & durant n années, elle vaudra actuellement:

$a+\left(\frac{20}{21}\right)a+\left(\frac{20}{21}\right)^2 a+\left(\frac{20}{21}\right)^3 a+\left(\frac{20}{21}\right)^4 a \ldots\ldots + \left(\frac{20}{21}\right)^n a.$

Voilà une progreſſion géométrique, & tout ſe réduit à en trouver la ſomme. On multipliera donc le dernier terme par l'expoſant, le produit eſt $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a$; ſouſtrayant le premier terme, il reſte $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a - a$; diviſant enfin par l'expoſant moins 1, c'eſt-à-dire, par $-\frac{1}{21}$, ou, ce qui revient au même, multipliant par -21, on aura la ſomme cherchée $= -21\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a + 21a$, ou bien, $21a - 21\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a$; & ce ſecond terme qu'il s'agit de ſouſtraire, ſe calcule facilement par les logarithmes.

SECTION QUATRIEME.

Des Equations algébriques, & de la réſolution de ces Equations.

CHAPITRE PREMIER.

De la réſolution des Problêmes en général.

563.

Le but principal de l'Algebre, ainſi que de toutes les parties des Mathématiques, eſt de déterminer la valeur de quantités, qui auparavant étoient inconnues. On l'atteint en peſant avec attention les conditions preſcrites, leſquelles s'expriment toujours par des quantités connues. C'eſt auſſi pourquoi on définit l'Algebre, *la ſcience qui enſeigne à déterminer des quantités inconnues par le moyen de quantités connues.*

564.

Ce que nous venons de dire s'accorde aussi avec tout ce qui a été exposé jusqu'ici. Par-tout on a vu la connoissance de certaines quantités faire arriver à celle d'autres quantités qu'on pouvoit auparavant regarder comme inconnues.

L'Addition en offroit d'abord un exemple. Pour trouver la somme de deux ou de plusieurs nombres donnés, il falloit chercher un nombre inconnu qui fût égal à ces nombres connus pris ensemble.

Dans la Soustraction on cherchoit un nombre qui fût égal à la différence de deux nombres connus.

Une multitude d'autres exemples se sont présentés dans la Multiplication & dans la Division, dans l'élévation des puissances & dans l'extraction des racines; la question se réduisoit toujours à trouver, par le moyen de quantités connues, une autre quantité inconnue jusqu'alors.

565.

Enfin dans la derniere section nous avons aussi résolu différentes questions, où il s'agissoit de déterminer un nombre qui ne pouvoit être conclu de la connoissance d'autres nombres donnés que sous de certaines conditions.

Toutes les questions se réduisent donc à trouver, par le secours de quelques nombres donnés, un nouveau nombre qui ait avec ceux-là une certaine connexion; & cette connexion se détermine par de certaines conditions ou propriétés qui doivent convenir à la quantité cherchée.

566.

Lorsqu'il se présente une question à résoudre, on indique par une des dernieres lettres de l'Alphabet le nombre cherché, & on examine ensuite de quelle maniere les conditions données peuvent former une égalité entre deux quantités; cette égalité

qui est représentée par une espece de formule qu'on appelle *équation*, sert ensuite à déterminer la valeur du nombre cherché, & par conséquent à résoudre la question. Il arrive quelquefois qu'on cherche plusieurs nombres; on les trouve pareillement par des équations.

567.

Expliquons-nous mieux par un exemple, & supposons la question ou le *problême* qui suit:

Vingt personnes, hommes & femmes, mangent dans une auberge, l'écot d'un homme est 8 sous, celui d'une femme est 7 sous, & la dépense totale se monte à 7 l. 5 sous; on demande le nombre des hommes & celui des femmes?

On supposera, pour résoudre cette question, que le nombre des hommes soit $= x$, & regardant maintenant ce nombre comme connu, on procédera de la même maniere que si on vouloit faire la preuve &

voir si ce nombre satisfait à la question. Or le nombre des hommes étant $= x$, & les hommes & les femmes faisant ensemble vingt personnes, il est facile de déterminer le nombre des femmes, on n'a qu'à soustraire de 20 celui des hommes, c'est-à-dire que le nombre des femmes $= 20 - x$.

Mais un homme dépense 8 sous, donc x hommes dépensent $8x$ sous.

Et puisqu'une femme dépense 7 sous, $20 - x$ femmes auront dépensé $140 - 7x$ sous.

Ainsi ajoutant ensemble $8x$ & $140 - 7x$, on voit que toutes les 20 personnes auront dépensé $140 + x$ sous. Or on sait d'avance combien elles ont dépensé, savoir 7 liv. 5 sous, ou 145 sous; il faut donc qu'il y ait égalité entre $140 + x$ & 145, c'est-à-dire qu'on ait l'équation $140 + x = 145$, & de-là on tire facilement $x = 5$.

Donc l'écot étoit de 5 hommes & de 15 femmes.

568.

Autre question de la même espece.

Vingt personnes, hommes & femmes, se trouvent dans une auberge ; les hommes dépensent 24 florins, & les femmes autant, & il se trouve qu'un homme a dépensé 1 florin de plus qu'une femme ; on demande combien il y avoit d'hommes & combien de femmes ?

Soit le nombre des hommes $= x$,
celui des femmes sera $= 20 - x$.

Or ces x hommes ayant dépensé 24 florins, l'écot de chaque homme est de $\frac{24}{x}$ florins.

De plus les $20 - x$ femmes ayant aussi dépensé 24 florins, l'écot de chaque femme est $\frac{24}{20-x}$ florins.

Mais on sait que cet écot d'une femme est d'un florin plus petit que celui d'un homme ; si donc on soustrait 1 de l'écot d'un homme, il faut qu'on obtienne celui d'une femme, & par conséquent que $\frac{24}{x}$

$- 1 = \frac{24}{20 - x}$. Voilà donc l'équation de laquelle il s'agit de tirer la valeur de x ; on ne trouve pas cette valeur avec la même facilité que dans la question précédente ; mais on verra dans la suite que $x = 8$, & cette valeur satisfait en effet à l'équation ; car $\frac{24}{8} - 1 = \frac{24}{12}$ renferme l'égalité $2 = 2$.

569.

On voit bien à quel point il est essentiel, dans tous les problêmes, de peser avec attention toutes les circonstances de la question, afin d'en déduire une équation, en exprimant par des lettres les nombres cherchés ou inconnus. Tout l'art consiste ensuite à résoudre ces équations pour en tirer les valeurs des nombres inconnus, & c'est de quoi nous nous occuperons dans cette section.

570.

Nous avons à remarquer d'abord une diversité qui réside dans les questions elles-

mêmes. Dans quelques-unes on ne cherche qu'une ſeule quantité inconnue, dans d'autres on en cherche deux ou pluſieurs; & il faut obſerver dans ce dernier cas qu'il faut, pour les déterminer toutes, pouvoir déduire des circonſtances ou des conditions du problême, autant d'équations qu'il y a d'inconnues.

571.

On a déjà pu s'appercevoir qu'une équation conſiſte en deux *membres* qu'on ſépare par le ſigne d'égalité, =, pour indiquer que ces deux quantités ſont égales l'une à l'autre. On eſt obligé ſouvent de faire ſubir bien des transformations à ces deux membres, afin d'en déduire la valeur de la quantité inconnue; mais ces transformations cependant doivent toutes ſe fonder ſur ce que deux quantités égales reſtent égales, ſoit qu'on leur ajoute ou qu'on en retranche des quantités égales, ſoit qu'on les multiplie ou qu'on les diviſe par un même

nombre, ſoit qu'on les éleve toutes deux à la même puiſſance, ou qu'on en extraie les racines d'un même degré, ſoit enfin que l'on prenne les logarithmes de ces quantités, comme nous l'avons déjà pratiqué dans la ſection précédente.

572.

Les équations qu'on réſout le plus facilement, ſont celles où l'inconnue ne paſſe pas la premiere puiſſance après qu'on a mis les termes de l'équation en ordre, & on les appelle *équations du premier degré.* Mais lorſqu'ayant réduit & ordonné une équation, on y rencontre le quarré ou la ſeconde puiſſance de l'inconnue, on a une *équation du ſecond degré*, qui eſt déjà plus difficile à réſoudre. Enſuite viennent les *équations du troiſieme degré*, qui renferment le cube de l'inconnue, & ainſi de ſuite. Nous traiterons de toutes dans cette ſection.

CHAPITRE II.

De la résolution des Equations du premier degré.

573.

LORSQUE le nombre cherché ou inconnu est indiqué par la lettre x, & que l'équation qu'on a obtenue est telle que l'un de ses membres renferme simplement cet x, & l'autre purement un nombre connu, comme, par exemp. $x=25$, la valeur cherchée de x est toute trouvée. C'est donc à parvenir à une telle forme qu'il faut toujours faire ses efforts, quelque compliquée que soit l'équation qu'on a trouvée d'abord. Nous donnerons dans la suite les regles qui rendent ces réductions plus faciles.

574.

Commençons par les cas les plus simples, & supposons d'abord qu'on soit parvenu à

l'équation $x+9=16$, on voit sur le champ que $x=7$. Et en général si on a trouvé $x+a=b$, où a & b signifient des nombres quelconques, mais connus, on n'a qu'à soustraire a de l'un & de l'autre membre, & on obtient l'équation $x=b-a$, qui indique la valeur de x.

575.

Si l'équation trouvée est $x-a=b$, on ajoutera des deux côtés a, & on aura la valeur cherchée de $x=b+a$.

On procédera de même, si la premiere équation a cette forme, $x-a=aa+1$; car on aura sur le champ $x=aa+a+1$.

Cette autre équation, $x-8a=20-6a$, donne $x=20-6a+8a$, ou $x=20+2a$.

Et celle-ci, $x+6a=20+3a$, donne $x=20+3a-6a$, ou $x=20-3a$.

576.

Si l'équation primitive a cette forme, $x-a+b=c$, on peut commencer par ajouter de part & d'autre a, on aura $x+b=c+a$;

& en soustrayant ensuite b des deux côtés, on trouvera $x=c+a-b$. Mais on peut aussi ajouter d'abord $+a-b$ de part & d'autre; on obtient par-là sur le champ $x=c+a-b$.

Ainsi dans les exemples suivans

Si $x-2a+3b=0$, on a $x=2a-3b$.

Si $x-3a+2b=25+a+2b$, on a $x=25+4a$.

Si $x-9+6a=25+2a$, on a $x=34-4a$.

577.

Quand l'équation trouvée a la forme $ax=b$, on divise seulement les deux membres par a, & on a $x=\frac{b}{a}$. Mais si l'équation est de la forme $ax+b-c=d$, il faudra d'abord faire disparoître les termes qui accompagnent ax, en ajoutant de part & d'autre $-b+c$; & après cela, en divisant par a la nouvelle équation $ax=d-b+c$, on aura $x=\frac{d-b+c}{a}$.

On auroit trouvé la même chose en soustrayant $+b-c$ de l'équation donnée; on

auroit eu pareillement $ax=d-b+c$, & $x=\frac{d-b+c}{a}$. En conséquence de cela

Si $2x+5=17$, on a $2x=12$, & $x=6$.

Si $3x-8=7$, on a $3x=15$, & $x=5$.

Si $4x-5-3a=15+9a$, on a $4x=20+12a$, & par conséquent $x=5+3a$.

578.

Quand la premiere équation aura la forme $\frac{x}{a}=b$, on multipliera des deux côtés par a, pour avoir $x=ab$.

Mais si l'on a $\frac{x}{a}+b-c=d$, il faudra d'abord faire $\frac{x}{a}=d-b+c$, après quoi on obtiendra $x=(d-b+c)a=ad-ab+ac$.

Soit $\frac{1}{2}x-3=4$, on a $\frac{1}{2}x=7$, & $x=14$.

Soit $\frac{1}{3}x-1+2a=3+a$, on aura $\frac{1}{3}x=4-a$, & $x=12-3a$.

Soit $\frac{x}{a-1}-1=a$, on aura $\frac{x}{a-1}=a+1$, & $x=aa-1$.

579.

Quand on est parvenu à une équation, comme $\frac{ax}{b}=c$, on multiplie d'abord par

b, afin d'avoir $ax=bc$, & divisant ensuite par a, on trouve $x=\frac{bc}{a}$.

Que si $\frac{ax}{b}-c=d$, on commenceroit par donner à l'équation cette forme $\frac{ax}{b}=d+c$, après quoi on parviendroit à la valeur de $ax=bd+bc$, & à celle de $x=\frac{bd+bc}{a}$.

Supposons $\frac{2}{3}x-4=1$, nous aurons $\frac{2}{3}x=5$, & $2x=15$; donc $x=\frac{15}{2}$ ou $=7\frac{1}{2}$.

Si $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=5$, nous avons $\frac{3}{4}x=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$; donc $3x=18$, & $x=6$.

580.

Considérons à présent le cas, qui peut arriver fréquemment, où deux ou plusieurs termes contiennent la lettre x, soit dans un seul membre de l'équation, soit dans tous les deux.

Si ces termes sont tous du même côté, c'est-à-dire dans un seul membre, comme dans l'équation $x+\frac{1}{2}x+5=11$, on a $x+\frac{1}{2}x=6$, & $3x=12$, & enfin $x=4$.

Soit $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=44$, & qu'on demande la valeur de x: si on multiplie d'abord par 3, on a $4x+\frac{3}{2}x=132$; multipliant ensuite par 2, on a $11x=264$; donc $x=24$. On auroit pu procéder plus briévement, en commençant par réduire les trois termes qui renferment x, au seul terme $\frac{11}{6}x$; & divisant ensuite par 11 l'équation $\frac{11}{6}x=44$, on auroit eu $\frac{1}{6}x=4$, donc $x=24$.

Soit $\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}x=1$, on aura, en réduisant, $\frac{5}{12}x=1$, & $x=2\frac{2}{5}$.

Soit, plus généralement, $ax-bx+cx=d$, c'est comme si on avoit $(a-b+c)x=d$, d'où l'on tire $x=\frac{d}{a-b+c}$.

581.

Lorsqu'il se trouve des termes renfermant x dans l'un & l'autre membre de l'équation, on commencera par faire disparoître ces termes du côté où cela est plus facile, c'est-à-dire où il y en a le moins.

Si on a, par exemple, l'équation $3x+2=x+10$, il faudra souſtraire d'abord x des deux côtés, on aura $2x+2=10$; donc $2x=8$, & $x=4$.

Qu'on ait $x+4=20-x$, il eſt clair que $2x+4=20$; & par conſéquent $2x=16$, & $x=8$.

Soit $x+8=32-3x$, on aura $4x+8=32$; enſuite $4x=24$, & $x=6$.

Soit $15-x=20-2x$, on aura $15+x=20$, & $x=5$.

Soit $1+x=5-\frac{1}{2}x$, on aura $1+\frac{3}{2}x=5$; après cela $\frac{3}{2}x=4$; $3x=8$; enfin $x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$.

Si $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x$, on ajoutera $\frac{1}{3}x$, cela donne $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}x$; ſouſtrayant $\frac{1}{3}$, il reſte $\frac{1}{12}x=\frac{1}{6}$; & multipliant par 12, on obtient $x=2$.

Si $1\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x$, on ajoute $\frac{2}{3}x$, cela donne $1\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{7}{6}x$. Souſtrayant $\frac{1}{4}$, on a $\frac{7}{6}x=1\frac{1}{4}$, d'où l'on tire $x=1\frac{1}{14}=\frac{15}{14}$, en multipliant par 6, & en diviſant par 7.

582.

Si on eſt parvenu à une équation où le nombre inconnu x eſt un dénominateur, il faut faire diſparoître la fraction, en multipliant toute l'équation par ce dénominateur.

Suppoſons qu'on ait trouvé $\frac{100}{x}-8=12$, on ajoutera d'abord 8, & on aura $\frac{100}{x}=20$; multipliant enſuite par x, on a $100=20x$; & diviſant par 20, on trouve $x=5$.

Soit $\frac{5x+3}{x-1}=7$.

Si on multiplie par $x-1$, on a $5x+3=7x-7$.

Souſtrayant $5x$, il reſte $3=2x-7$.

Ajoutant 7, il vient $2x=10$. Donc $x=5$.

583.

Quelquefois auſſi on rencontre des ſignes radicaux, & l'équation ne laiſſe pas d'appartenir au premier degré. Par exemple, on cherche un nombre x au-deſſous de 100, & tel que la racine quarrée de $100-x$ devienne égale à 8, ou $\sqrt{(100-x)}=8$,

on prendra des deux côtés le quarré $100 - x = 64$, & en ajoutant x on aura $100 = 64 + x$, d'où l'on tire $x = 100 - 64 = 36$.

On pourroit aussi, puisque $100 - x = 64$, soustraire 100 de l'un & de l'autre membre; on auroit $-x = -36$, & en multipliant par -1, $x = 36$.

584.

Quelquefois enfin le nombre inconnu x se trouve dans l'exposant, nous en avons vu des exemples plus haut, & il faut alors avoir recours aux logarithmes.

Ainsi, quand on a $2^x = 512$, on prend des deux côtés les logarithmes; on a $x\text{L}.2 = \text{L}.512$; & en divisant par L.2, on trouve $x = \frac{\text{L}.512}{\text{L}.2}$. Les tables donneront donc

$$x = \frac{2,7092700}{0,3010300} = \frac{270927}{30103} \text{ ou } x = 9.$$

Soit $5.3^{2x} - 100 = 305$, on ajoutera 100; cela fait $5.3^{2x} = 405$; divisant par 5, on a $3^{2x} = 81$; prenant les logarithmes $2x\text{L}.3 = \text{L}.81$, & divisant par $2\text{L}.3$, on a $x = \frac{\text{L}.81}{2\text{L}.3}$ ou $x = \frac{\text{L}.81}{\text{L}.9}$; donc $x = \frac{1,9084850}{0,9542425} = \frac{19084850}{9542425} = 2$.

CHAPITRE III.

De la solution de quelques questions relatives au Chapitre précédent.

585.

PREMIERE QUESTION. Partager 7 en deux parties, telles que la plus grande surpasse de 3 la plus petite.

Soit la plus grande partie $= x$, la plus petite sera $= 7 - x$; il faut donc que $x = 7 - x + 3$, ou $= 10 - x$; ajoutant x, on a $2x = 10$; & divisant par 2, le résultat est $x = 5$.

Réponse. La plus grande partie est 5, & la plus petite est 2.

Seconde question. On propose de partager a en deux parties, de façon que la plus grande surpasse de b la plus petite.

Soit la plus grande partie $= x$, l'autre sera $a - x$; ainsi $x = a - x + b$; ajoutant

x, on a $2x = a + b$; & divisant par 2, $x = \frac{a+b}{2}$.

Autre solution. Soit la plus grande partie $= x$; comme elle est plus grande de b que la plus petite, il est clair que celle-ci est de b plus petite que l'autre, & $= x - b$. Or ces deux parties, prises ensemble, doivent faire a; il faut donc que $2x - b = a$; ajoutant b, on a $2x = a + b$; donc $x = \frac{a+b}{2}$, c'est la valeur de la plus grande partie, & celle de la plus petite sera $\frac{a+b}{2} - b$ ou $\frac{a+b}{2} - \frac{2b}{2}$, ou $\frac{a-b}{2}$.

586.

Troisieme question. Un pere qui a trois fils, leur laisse 1600 écus. Le testament porte que l'aîné aura 200 écus de plus que le puîné, & que celui-ci aura 100 écus de plus que le cadet. On demande quelle sera la portion de chacun?

Soit la portion du troisieme fils $= x$; celle du second sera $= x + 100$, & celle du premier $= x + 300$. Or on sait que ces trois

portions font ensemble 1600 écus. On a donc

$$3x + 400 = 1600$$
$$3x = 1200$$
$$\& \; x = 400.$$

Réponse. La part du cadet est 400 écus, celle du puîné est 500 écus, & celle de l'aîné est 700 écus.

587.

Quatrieme question. Un pere laisse quatre fils & 8600 liv.; suivant le testament la part de l'aîné doit être double de celle du second, moins 100 liv. le second doit recevoir trois fois autant que le troisieme, moins 200 liv. & le troisieme doit recevoir quatre fois autant que le quatrieme, moins 300 l. On demande quelles sont les portions de ces quatre fils? Nommons x la portion du cadet; celle du troisieme fils sera $= 4x - 300$; celle du second $= 12x - 1100$, & celle de l'aîné $= 24x - 2300$. La somme de ces quatre parts doit faire 8600 liv. On a donc l'équation $41x - 3700 = 8600$, ou $41x = 12300$, & $x = 300$.

Réponse. Il revient au cadet 300 livres, au troisieme fils 900 livres, au second 2500 livres, & à l'aîné 4600 livres.

588.

Cinquieme question. Un homme laisse 11000 écus à partager entre sa veuve, deux fils & trois filles. Il veut que la mere reçoive deux fois la portion d'un fils, & qu'un fils reçoive deux fois autant qu'une fille. On demande combien il revient à ces personnes séparément?

Supposons la portion d'une fille $= x$, celle d'un fils est par conséquent $= 2x$, & celle de la veuve $= 4x$; tout l'héritage est donc $3x + 4x + 4x$; ainsi $11x = 11000$, & $x = 1000$.

Réponse. Une fille tire 1000 écus,
ainsi toutes les trois reçoivent 3000 écus.
Un fils tire 2000 écus,
ainsi les deux fils reçoivent 4000
La mere reçoit — — — — 4000
somme 11000 écus.

589.

Sixieme question. Un pere veut par son testament, que ses trois fils partagent son bien de la maniere suivante: l'aîné reçoit 1000 écus de moins que la moitié de tout l'héritage; le second reçoit 800 écus de moins que le tiers de tout le bien; & le troisieme reçoit 600 écus de moins que le quart du bien. On demande à quelle somme se monte l'héritage entier, & quelle est la part de chaque héritier?

Exprimons l'héritage par x:
la part du premier fils est $\frac{1}{2}x - 1000$
celle du second $\frac{1}{3}x - 800$
celle du troisieme $\frac{1}{4}x - 600$.

Ainsi les trois fils ensemble tirent $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - 2400$, & cette somme doit être égale à x; on a donc l'équation $\frac{13}{12}x - 2400 = x$.

Soustrayant x, il reste $\frac{1}{12}x - 2400 = 0$.

Ajoutant 2400, on a $\frac{1}{12}x=2400$. Multipliant enfin par 12, le produit eſt x égalant 28800.

Réponſe. L'héritage eſt de 28800 écus, &

l'aîné des fils reçoit	13400 écus.
le puîné — — — —	8800
le cadet — — — —	6600
tous trois enſemble	28800 écus.

590.

Septieme queſtion. Un pere laiſſe quatre fils, qui partagent ſon bien de la maniere qui ſuit:

Le premier prend la moitié de l'héritage, moins 3000 livres.

Le ſecond prend le tiers, moins 1000 l.

Le troiſieme prend exactement le quart du bien.

Le quatrieme prend 600 livres, & la cinquieme partie du bien.

De combien étoit l'héritage, & combien chaque fils a-t-il reçu?

Soit l'héritage total $=x$:

l'aîné des fils aura	$\frac{1}{2}x-3000$
le puîné — — —	$\frac{1}{3}x-1000$
le troiſieme — —	$\frac{1}{4}x$
le cadet — — —	$\frac{1}{5}x+600$.

Tous les quatre auront reçu $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x-3400$, ce qu'il faut égaler à x, d'où réſulte l'équation $\frac{77}{60}x-3400=x$;

ſouſtrayant x, on a $\frac{17}{60}x-3400=0$;

ajoutant 3400, on a $\frac{17}{60}x=3400$;

diviſant par 17, on a $\frac{1}{60}x=200$;

multipliant par 60, on a $x=12000$.

Réponſe. L'héritage étoit de 12000 liv.

le premier fils en a pris	3000
le ſecond — — — —	3000
le troiſieme — — —	3000
le quatrieme — — —	3000.

591.

Huitieme queſtion. Trouver un nombre tel que, ſi on y ajoute ſa moitié, la ſomme

ſurpaſſe 60 d'autant que le nombre lui-même eſt au-deſſous de 65.

Soit ce nombre $=x$, il faut que $x+\frac{1}{2}x-60=65-x$, c'eſt-à-dire $\frac{3}{2}x-60=65-x$;

ajoutant x, on a $\frac{5}{2}x-60=65$;

ajoutant 60, on a $\frac{5}{2}x=125$;

diviſant par 5, on a $\frac{1}{2}x=25$;

multipliant par 2, on a $x=50$.

Réponſe. Le nombre cherché eſt 50.

592.

Neuvieme queſtion. Partager 32 en deux parties telles que, ſi je diviſe la moindre par 6, & la plus grande par 5, les deux quotiens pris enſemble faſſent 6.

Soit la plus petite des deux parties cherchées $=x$; la plus grande ſera $=32-x$; la premiere, diviſée par 6, donne $\frac{x}{6}$; la ſeconde, diviſée par 5, donne $\frac{32-x}{5}$; or il faut que $\frac{x}{6}+\frac{32-x}{5}=6$. Ainſi multipliant par 5, on a $\frac{5}{6}x+32-x=30$, ou $-\frac{1}{6}x+32=30$.

ajoutant $\frac{1}{6}x$, il vient $32=30+\frac{1}{6}x$;

ſouſtrayant 30, il reſte $2=\frac{1}{6}x$;

multipliant par 6, on a $x=12$.

Réponſe. Les deux parties ſont: la plus petite $=12$, la plus grande $=20$.

593.

Dixieme queſtion. Trouver un nombre tel que, ſi je le multiplie par 5, le produit ſoit autant au-deſſous de 40, que le nombre lui-même eſt au-deſſous de 12. Je nommerai ce nombre x, il eſt au-deſſous de 12 de $12-x$; prenant le nombre x cinq fois, j'ai $5x$, ce qui eſt moindre que 40 de $40-5x$, & cette quantité doit être égale à $12-x$.

J'ai donc $40-5x=12-x$;

ajoutant $5x$, j'ai $40=12+4x$;

ſouſtrayant 12, j'ai $28=4x$;

diviſant par 4, j'ai $x=7$, nombre cherché.

594.

Onzieme question. Partager 25 en deux parties, telles que la plus grande contienne 49 fois la plus petite.

Soit cette derniere $=x$, la plus grande sera $=25-x$. Celle-ci divisée par celle-là doit donner le quotient 49 ; on a donc $\frac{25-x}{x}=49$.

Multipliant par x, on a $25-x=49x$;
ajoutant x, — — — $25 \quad =50x$;
divisant par 50, — — $x \quad =\frac{1}{2}$.

Réponse. La plus petite des deux parties cherchées est $\frac{1}{2}$, & la plus grande est $24\frac{1}{2}$; divisant celle-ci par $\frac{1}{2}$, ou multipliant par 2, on trouve 49.

595.

Douzieme question. Partager 48 en neuf parties, de façon que l'une soit toujours de $\frac{1}{2}$ plus grande que la précédente.

Soit la premiere & la plus petite partie $=x$, la seconde sera $=x+\frac{1}{2}$, la troisieme $=x+1$, &c.

Or ces parties formant une progression arithmétique, dont le premier terme $=x$, le neuvieme & dernier terme sera $=x+4$. Ajoutant ces deux termes ensemble, on a $2x+4$; multipliant cette quantité par le nombre des termes, ou par 9, on a $18x+36$; & divisant ce produit par 2, on obtient la somme de toutes les neuf parties $=9x+18$, & qui doit équivaloir à 48. On a donc $9x+18=48$;

soustrayant 18, il reste $9x=30$;
& divisant par 9 on a $\quad x=3\frac{1}{3}$.

Réponse. La premiere partie est $3\frac{1}{3}$, & les neuf parties se suivent dans l'ordre que voici :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3\frac{1}{3}$	$+3\frac{5}{6}$	$+4\frac{1}{3}$	$+4\frac{5}{6}$	$+5\frac{1}{3}$	$+5\frac{5}{6}$	$+6\frac{1}{3}$	$+6\frac{5}{6}$	$+7\frac{1}{3}$.

Toutes ensemble font 48.

596.

Treizieme question. Trouver une progression arithmétique, dont le premier terme $=5$, le dernier $=10$, & la somme $=60$.

Nous ne connoissons ici ni la différence ni le nombre des termes, mais nous savons que le premier & le dernier terme nous suffiroient pour exprimer la somme de la progression, si seulement le nombre des termes étoit donné. Nous supposerons donc ce nombre $=x$, & la somme de la progression s'exprimera par $\frac{15x}{2}$; or nous savons d'ailleurs que cette somme est 60; ainsi

$$\frac{15x}{2}=60;\ \frac{1}{2}x=4,\ \&\ x=8.$$

Maintenant, puisque le nombre des termes est 8, si nous supposons la différence $=z$, il ne s'agit plus que de chercher le huitieme terme dans cette supposition, & de le faire $=10$. Le second terme est $5+z$; le troisieme est $5+2z$, & le huitieme est $5+7z$, ainsi

$$5+7z=10$$
$$7z=5$$
$$\&\ z=\frac{5}{7}.$$

Réponse. La différence de la progression est $\frac{5}{7}$, & le nombre des termes est 8, & par conséquent la progression est

$$\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 5+ & 5\frac{5}{7}+ & 6\frac{3}{7}+ & 7\frac{1}{7}+ & 7\frac{6}{7}+ & 8\frac{4}{7}+ & 9\frac{2}{7}+ & 10,\end{matrix}$$

dont la somme $=60$.

597.

Quatorzieme question. Je cherche un nombre tel, que si du double de ce nombre je soustrais 1, & que je double le reste, qu'ensuite je soustraie 2, & que je divise le reste par 4, le nombre résultant de ces opérations soit de 1 plus petit que le nombre cherché.

Je supposerai ce nombre $=x$; le double est $2x$; soustrayant 1, il reste $2x-1$; doublant ceci, j'ai $4x-2$; soustrayant 2, il me reste $4x-4$; divisant par 4, il me vient $x-1$; & c'est ce qui doit être d'une unité plus petit que x; ainsi

$$x-1=x-1.$$

Mais voilà ce qu'on nomme une *équation identique*; elle indique que x n'est pas du tout déterminé, & qu'on peut prendre à sa place un nombre quelconque à volonté.

598.

Quinzieme question. J'ai acheté quelques aunes de drap à raison de 7 écus pour 5 aunes, j'ai revendu de ce drap à raison de 11 écus pour 7 aunes, & j'ai gagné 100 écus sur le tout : on demande combien il y avoit de drap ?

Supposons qu'il y en ait eu x aunes ; il faudra voir d'abord combien l'emplette a coûté ; cela se trouve par la regle de trois suivante :

Cinq aunes coûtent 7 écus ; que coûtent x aunes ? *Réponse*, $\frac{7}{5}x$ écus.

Voilà ma dépense. Voyons à présent quelle est ma recette ; il faudra faire la regle de trois qui suit : Sept aunes me valent 11 écus, combien me rapportent x aunes ? *Rép.* $\frac{11}{7}x$ écus.

Cette recette doit surpasser de 100 écus la dépense ; on a donc cette équation :

$\frac{11}{7}x = \frac{7}{5}x + 100$;

soustrayant $\frac{7}{5}x$, il reste $\frac{6}{35}x = 100$;

donc $6x = 3500$, & $x = 583\frac{1}{3}$.

Réponse. Il y avoit $583\frac{1}{3}$ aunes, qui ont été achetées pour $816\frac{2}{3}$ écus, & revendues ensuite pour $916\frac{2}{3}$ écus, moyennant quoi le profit a été de 100 écus.

599.

Seizieme question. Quelqu'un achete 12 pieces de drap pour 140 écus. Deux sont blanches, trois sont noires & sept sont bleues. Une piece de drap noir coûte deux écus de plus qu'une piece de drap blanc, & une piece de drap bleu coûte trois écus de plus qu'une noire ; on demande le prix de chaque sorte.

Supposez qu'une piece blanche coûte x écus, les deux de cette sorte coûteront $2x$. De plus une piece noire coûtant $x+2$, les trois pieces de cette couleur coûteront $3x + 6$. Enfin une piece bleue coûte $x+5$; donc les sept bleues coûtent $7x+35$. Ainsi toutes les douze pieces reviennent ensemble à $12x+41$.

Or le prix réel & connu de ces douze pieces eſt 140 écus ; on a donc $12x+41=140$,

& $12x=99$;

donc $x=8\frac{1}{4}$;

ainſi une piece de drap blanc coûte $8\frac{1}{4}$ écus.

drap noir $10\frac{1}{4}$

drap bleu $13\frac{1}{4}$

600.

Dix-ſeptieme queſtion. Un homme qui a acheté des noix muſcades, dit que trois noix lui coûtent autant au-delà d'un ſou que quatre lui coûtent au-delà de dix liards: on demande le prix de ces noix ?

On nommera x l'argent que trois noix coûtent de plus qu'un ſou ou quatre liards, & on dira : trois noix coûtent $x+4$ liards, & quatre coûteront, par la condition du problême, $x+10$ liards. Or le prix de trois noix donne celui de quatre noix encore d'une autre maniere, ſavoir par la

regle de trois ; on fera $3:x+4=4$. *Réponſe*, $\frac{4x+16}{3}$. Ainſi $\frac{4x+16}{3}=x+10$, ou $4x+16=3x+30$;

donc $x+16=30$,

& $x=14$.

Réponſe. Trois noix coûtent 18 liards, & quatre coûtent 6 ſous ; donc chacune coûte 6 liards.

601.

Dix-huitieme queſtion. Quelqu'un a deux gobelets d'argent avec un ſeul couvercle pour les deux. Le premier gobelet peſe 12 onces, & ſi on y met le couvercle, il peſe deux fois plus que l'autre gobelet ; mais ſi on couvre l'autre gobelet, celui-ci peſe trois fois plus que le premier : il s'agit de trouver le poids du ſecond gobelet & celui du couvercle.

Suppoſons le poids du couvercle $=x$ onces ; le premier gobelet étant couvert peſera $x+12$ onces. Or ce poids étant le double de celui du ſecond gobelet, il faut

que ce gobelet-ci pese $\frac{1}{2}x+6$. Si on le couvre, il pesera $\frac{3}{2}x+6$, & ce poids doit être le triple de 12, ou du poids du premier gobelet. On aura donc l'équation $\frac{3}{2}x+6=36$, ou $\frac{3}{2}x=30$; donc $\frac{1}{2}x=10$ & $x=20$.

Réponse. Le couvercle pese 20 onces, & le second gobelet pese 16 onces.

602.

Dix-neuvieme question. Un Banquier a deux especes de monnoie; il faut a pieces de la premiere pour faire un écu; il faut b pieces de la seconde pour faire la même somme. Quelqu'un vient & demande c pieces pour un écu; combien le Banquier lui donnera-t-il de pieces de chaque espece pour le satisfaire?

Supposons que le Banquier donne x pieces de la premiere espece; il est clair qu'il donnera $c-x$ pieces de l'autre espece. Or les x pieces de la premiere valent $\frac{x}{a}$ écu par la proportion $a:1=x:\frac{x}{a}$; & les $c-x$ pieces de la seconde espece valent $\frac{c-x}{b}$ écu, parce qu'on a $b:1=c-x:\frac{c-x}{b}$. Il faut donc que $\frac{x}{a}+\frac{c-x}{b}=1$, ou $\frac{bx}{a}+c-x=b$, ou $bx+ac-ax=ab$, ou bien $bx-ax=ab-ac$; d'où l'on tire $x=\frac{ab-ac}{b-a}$, ou $x=\frac{a(b-c)}{b-a}$. Par conséquent $c-x=\frac{bc-ab}{b-a}=\frac{b(c-a)}{b-a}$.

Réponse. Le Banquier donnera $\frac{a(b-c)}{b-a}$ pieces de la premiere espece, & $\frac{b(c-a)}{b-a}$ pieces de la seconde espece.

Remarque. Ces deux nombres se trouvent facilement par la regle de trois, lorsqu'il s'agit de faire une application de nos résultats. On dira, pour trouver le premier: $b-a:b-c=a:\frac{ab-ac}{b-a}$. Le second nombre se détermine en faisant: $b-a:c-a=b:\frac{bc-ab}{b-a}$.

Il faut remarquer aussi que a est plus petit que b, & que c est pareillement plus petit que b, mais cependant plus grand que a, ainsi que la nature de la chose le demande.

603.

Vingtieme question. Un Banquier a deux sortes de monnoie: dix pieces de l'une font un écu, & il faut 20 pieces de l'autre pour faire un écu. Or quelqu'un demande à changer un écu contre dix-sept pieces de monnoie; combien recevra-t-il donc de pieces de chaque sorte?

Nous avons ici $a=10$, $b=20$, & $c=17$; ce qui fournit les regles de trois suivantes:

I. $10:3=10:3$, ainsi 3 pieces de la premiere sorte.

II. $10:7=20:14$, & 14 pieces de la seconde sorte.

604.

Vingt-unieme question. Un pere laisse à sa mort quelques enfans, avec un bien qu'ils partagent de la maniere suivante:

Le premier reçoit cent écus & la dixieme partie du reste.

Le second tire deux cents écus & la dixieme partie de ce qui reste.

Le troisieme prend trois cents écus & la dixieme partie de ce qui reste.

Le quatrieme prend quatre cents écus & la dixieme partie de ce qui reste, & ainsi de suite.

Et il se trouve à la fin, que le bien a été partagé également entre tous les enfans. On demande maintenant de combien étoit l'héritage, combien il y avoit d'enfans, & combien chacun a reçu?

Cette question est d'une nature toute particuliere, & mérite par-là qu'on y fasse attention. Pour la résoudre plus facilement, nous supposerons l'héritage total $=z$ écus; & puisque tous les enfans tirent une même somme, soit cette portion d'un chacun $=x$, moyennant quoi le nombre des enfans s'exprime par $\frac{z}{x}$. Cela posé, voici comment nous nous y prendrons pour résoudre la question proposée.

La Masse ou le bien à partager.	Ordre des Enfans.	Portion de chacun.	Différences.
z	le 1r.	$x=100+\frac{z-100}{10}$	
$z-x$	le 2d.	$x=200+\frac{z-x-200}{10}$	$100-\frac{x-100}{10}=0$
$z-2x$	le 3e.	$x=300+\frac{z-2x-300}{10}$	$100-\frac{x-100}{10}=0$
$z-3x$	le 4e.	$x=400+\frac{z-3x-400}{10}$	$100-\frac{x-100}{10}=0$
$z-4x$	le 5e.	$x=500+\frac{z-4x-500}{10}$	$100-\frac{x-100}{10}=0$
$z-5x$	le 6e.	$x=600+\frac{z-5x-600}{10}$	& ainsi de suite.

Nous avons inséré dans la derniere colonne les différences qu'on obtient en soustrayant chaque portion de la suivante. Or toutes les portions étant égales, il faut que chacune de ces différences soit $=0$. Et comme il arrive heureusement qu'une même expression a lieu pour toutes ces différences, il suffira d'en égaler une seule à zéro, & on aura donc l'équation $100-\frac{x-100}{10}=0$. Multipliant par 10, on a $1000-x-100=0$, ou $900-x=0$; par conséquent $x=900$.

Nous savons donc déjà que la part de chaque enfant étoit 900 écus; ainsi en prenant à présent à volonté une des équations de la troisieme colonne, par exemple la premiere, elle devient, en substituant à x sa valeur, $900=100+\frac{z-100}{10}$, d'où l'on tire z sur le champ; car on a $9000=1000+z-100$, ou $9000=900+z$; donc $z=8100$; & par conséquent $\frac{z}{x}=9$.

Réponse. Ainsi le nombre des enfans $=9$; l'héritage laissé par le pere $=8100$ écus; & la portion de chaque enfant $=900$ écus.

CHAPITRE IV.

De la résolution de deux ou de plusieurs Equations du premier degré.

605.

IL arrive souvent qu'on est obligé de faire entrer dans le calcul deux ou plusieurs de ces nombres inconnus, représentés par les

lettres x, y, z, &c. & si la question est déterminée, on parvient dans ce cas-là à autant d'équations, desquelles il s'agit ensuite de tirer les inconnues. Comme nous ne considérons encore que les équations qui ne contiennent pas des puissances d'une inconnue plus élevées que la premiere, ni des produits de deux ou de plusieurs inconnues, on voit que ces équations auront toutes la forme $az+by+cx=d$.

606.

Commençant donc par deux équations, nous chercherons à en tirer les valeurs de x & y; & pour traiter ce cas d'une maniere générale, soient les deux équations: I. $ax+by=c$, & II. $fx+gy=h$, où a, b, c & f, g, h signifient des nombres connus. Il s'agit donc ici de tirer de ces deux équations, les deux inconnues x & y.

607.

La voie la plus naturelle pour y parvenir se présente aisément à l'esprit; c'est de

déterminer par l'une & l'autre équation la valeur d'une des inconnues, par exemple, de x, & de considérer ensuite l'égalité de ces deux valeurs; car on aura une équation, dans laquelle l'inconnue y se trouvera seule & pourra être déterminée par les regles que nous avons données plus haut. Connoissant donc alors y, on n'aura plus qu'à substituer sa valeur dans une des quantités qui exprimoient x.

608.

D'après cette regle, nous tirons de la premiere équation: $x=\frac{c-by}{a}$, & de la seconde, $x=\frac{h-gy}{f}$; posant ces deux valeurs égales l'une à l'autre, nous avons cette nouvelle équation:

$$\frac{c-by}{a}=\frac{h-gy}{f};$$

multipliant par a, le produit est $c-by$ $=\frac{ah-agy}{f}$;

multipliant par f, le produit est $fc-fby$ $=ah-agy$;

ajoutant agy, on a $fc - fby + agy = ah$; soustrayant fc, il reste $-fby + agy = ah - fc$;

ou bien $(ag - bf)y = ah - fc$;

divisant enfin par $ag - bf$, nous avons $y = \frac{ah-fc}{ag-bf}$.

Pour substituer donc à présent cette valeur de y dans une des deux valeurs que nous avons trouvées pour x, comme dans la premiere $x = \frac{c-by}{a}$, nous aurons d'abord $-by = -\frac{abh+bcf}{ag-bf}$; de-là $c - by = c - \frac{abh+bcf}{ag-bf}$, ou $c - by = \frac{acg-bcf-abh+bcf}{ag-bf} = \frac{acg-abh}{ag-bf}$; & divisant par a, $x = \frac{c-by}{a} = \frac{cg-bh}{ag-bf}$.

609.

Premiere question. Pour éclaircir cette méthode par des exemples, soit proposé de trouver deux nombres, dont la somme soit $= 15$, & la différence $= 7$.

Nommons x le nombre qui est le plus grand, & y le plus petit. Nous aurons

I.) $x + y = 15$, & II.) $x - y = 7$.

La premiere équation donne $x = 15 - y$, & la seconde donne $x = 7 + y$; de-là résulte la nouvelle équation $15 - y = 7 + y$. Ainsi $15 = 7 + 2y$; $2y = 8$, & $y = 4$; au moyen de quoi on trouve $x = 11$.

Réponse. Le plus petit nombre est 4, & le plus grand est 11.

610.

Seconde question. On peut aussi généraliser la question précédente, en cherchant deux nombres, dont la somme soit $= a$, & la différence $= b$.

Soit le plus grand des deux $= x$, & le plus petit $= y$.

On aura I.) $x + y = a$, & II.) $x - y = b$;

la premiere équation donne $x = a - y$;

la seconde — — — — — $x = b + y$.

Donc $a - y = b + y$; $a = b + 2y$; $2y = a - b$; enfin $y = \frac{a-b}{2}$, & par conséquent $x = a - y = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2}$.

Réponse. Le plus grand nombre, où x est $= \frac{a+b}{2}$; & le plus petit, où y est $= \frac{a-b}{2}$,

ou, ce qui revient au même, $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, & $y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$; & de-là résulte le théoreme suivant: Quand la somme de deux nombres quelconques est a, & que la différence de ces deux nombres est b, le plus grand des deux nombres est égal à la moitié de la somme *plus* la moitié de la différence; & le plus petit des deux nombres est égal à la somme *moins* la moitié de la différence.

611.

On peut aussi résoudre la même question de la maniere qui suit:

Puisque les deux équations sont, $x+y=a$, & $x-y=b$.

Si on les ajoute l'une avec l'autre, on a $2x=a+b$.

Donc $x=\frac{a+b}{2}$.

Ensuite, soustrayant les mêmes équations l'une de l'autre, on a $2y=a-b$; donc $y=\frac{a-b}{2}$.

612.

Troisieme question. Un mulet & un âne portent des charges de quelques quintaux. L'âne se plaint de la sienne & dit au mulet: il ne me manque que de porter encore un quintal de ta charge, pour être plus chargé que toi du double. Le mulet répond: oui, mais si tu me donnois un quintal de la tienne, je serois trois fois plus chargé que toi. On demande combien de quintaux ils portoient chacun?

Supposons la charge du mulet de x quintaux, & celle de l'âne de y quintaux. Si le mulet donne à l'âne un quintal, celui-ci aura $y+1$, & il restera à l'autre $x-1$; & puisque dans ce cas l'âne est deux fois plus chargé que le mulet, on a $y+1=2x-2$.

Mais si l'âne donne un quintal au mulet, celui-ci a $x+1$, & l'âne garde $y-1$; & la charge du premier étant maintenant triple de celle du second, on a $x+1=3y-3$.

Nos deux équations seront par conséquent

I.) $y+1=2x-2$, II.) $x+1=3y-3$.

La premiere donne $x=\frac{y+3}{2}$, & la seconde donne $x=3y-4$; de-là résulte la nouvelle équation $\frac{y+3}{2}=3y-4$, qui donne $y=\frac{11}{5}$, & au moyen de quoi on détermine aussi la valeur de x, qui devient $=2\frac{3}{5}$.

Réponse. Le mulet portoit $2\frac{3}{5}$ quintaux, & l'âne portoit $2\frac{1}{5}$ quintaux.

613.

Lorsqu'on a trois nombres inconnus, & autant d'équations, comme, par exemple, I.) $x+y-z=8$, II.) $x+z-y=9$, III.) $y+z-x=10$, on commencera, comme auparavant par tirer de chacune la valeur de x, & on aura par la I^e^.) $x=8+z-y$; par la IIe.) $x=9+y-z$, & par la IIIe.) $x=y+z-10$.

Comparant maintenant la premiere de ces valeurs avec la seconde, & après cela

aussi avec la troisieme, on aura les équations suivantes:

I.) $8+z-y=9+y-z$, II.) $8+z-y=y+z-10$.

Or la premiere donne $2z-2y=1$, & la seconde donne $2y=18$, ou $y=9$; si donc on substitue cette valeur de y dans $2z-2y=1$, on a $2z-18=1$, & $2z=19$, ainsi $z=9\frac{1}{2}$; il ne reste donc que x à déterminer, & on le trouve facilement $=8\frac{1}{2}$.

Il est arrivé ici par hasard que la lettre z s'est éliminée dans la derniere équation, & qu'on a trouvé la valeur de y immédiatement. Si ce cas n'avoit pas eu lieu, on auroit eu deux équations entre z & y, qu'il auroit fallu résoudre par la regle précédente.

614.

Qu'on ait trouvé les trois équations suivantes:

I.) $3x+5y-4z=25$, II.) $5x-2y+3z=46$, III.) $3y+5z-x=62$.

Si on tire de chacune la valeur de x, on a

$$\text{I.)}\ x=\frac{25-5y+4z}{3},\ \text{II.)}\ x=\frac{46+2y-3z}{5},$$
$$\text{III.)}\ x=3y+5z-62.$$

Comparant à présent ces trois valeurs entr'elles, & d'abord la troisieme avec la premiere, on a $3y+5z-62=\frac{25-5y+4z}{3}$; multipliant par 3, $9y+15z-186=25-5y+4z$; ainsi $9y+15z=211-5y+4z$, & $14y+11z=211$ par la premiere & la troisieme. Comparant aussi la troisieme avec la seconde, on a $3y+5z-62=\frac{46+2y-3z}{5}$, ou $46+2y-3z=15y+25z-310$, ce qui se réduit à $356=13y+28z$.

On tirera maintenant de ces deux nouvelles équations la valeur de y:

I.) $211=14y+11z$; donc $14y=211-11z$
$$\&\ y=\frac{211-11z}{14}.$$
II.) $356=13y+28z$; donc $13y=356-28z$,
$$\&\ y=\frac{356-28z}{13}.$$

Ces deux valeurs forment la nouvelle équation $\frac{211-11z}{14}=\frac{356-28z}{13}$, laquelle se change

en celle-ci, $2743-143z=4984-392z$, qui se réduit à $249z=2241$, & d'où l'on tire $z=9$.

Cette valeur étant substituée dans une des deux équations de y & z, on trouve $y=8$, & enfin une substitution semblable dans une des trois valeurs de x, donnera $x=7$.

615.

Si on avoit plus de trois inconnues à déterminer, & autant d'équations à résoudre, on pourroit s'y prendre de la même maniere; mais on se trouveroit engagé le plus souvent dans des calculs fort prolixes.

Il est donc à propos de remarquer que dans chaque cas particulier on ne manque guere de rencontrer des moyens qui en facilitent beaucoup la résolution. Ces moyens sont d'introduire dans le calcul, à côté des inconnues principales, une nouvelle inconnue arbitraire, telle qu'est, par ex. la somme de toutes les autres; & quand on est un

peu versé dans ces sortes de calculs, on juge assez facilement ce qu'il est le plus convenable de faire (*). Nous allons rapporter quelques exemples qui peuvent guider dans l'application de cette méthode.

616.

Quatrieme question. Trois personnes jouent ensemble ; dans la premiere partie le premier Joueur perd avec chacun des deux autres autant que chacun d'eux avoit d'argent sur lui. Dans la seconde partie, c'est au second Joueur que les deux autres gagnent autant chacun qu'ils ont déjà d'argent. Dans la troisieme partie enfin, le premier & le second Joueur gagnent au troisieme autant d'argent chacun, qu'ils en avoient. Ils cessent alors de jouer, & il se

(*) M. *Cramer* a donné à la fin de son *Introduction à l'analyse des lignes courbes*, une très-belle regle pour déterminer immédiatement, & sans passer par les opérations ordinaires, la valeur des inconnues de ces sortes d'équations, en quelque nombre que soient ces inconnues.

trouve qu'ils ont tous une somme égale, savoir vingt-quatre louis chacun. On demande avec combien d'argent chacun s'est mis au jeu ?

Supposons que l'enjeu du premier Joueur ait été de x louis, celui du second, y, & celui du troisieme, z. Et faisons outre cela la somme de tous les enjeux, ou $x+y+z$, $=s$. Or le premier Joueur perdant dans la premiere partie autant d'argent qu'en ont les deux autres, il perd $s-x$; (car lui-même ayant eu x, les deux autres auront eu $s-x$) ; donc il lui restera $2x-s$; le second aura $2y$, & le troisieme aura $2z$.

Voici donc ce que chacun aura après la premiere partie : le I.) $2x-s$, le II.) $2y$, le III.) $2z$.

Dans la seconde partie, le second Joueur qui a maintenant $2y$, perd autant d'argent qu'en ont les deux autres, c'est-à-d. $s-2y$; il lui reste par conséquent $4y-s$. Quant aux autres, ils auront le double chacun de ce qu'ils avoient ; ainsi après la seconde

partie les trois Joueurs ont le I.) $4x-2s$, le II.) $4y-s$, le III.) $4z$.

Dans la troisieme partie, c'est le troisieme Joueur, lequel a actuellement $4z$, qui est le perdant; il perd avec le premier $4x-2s$, & avec le second $4y-s$; par conséquent après cette partie nos trois Joueurs auront:

le I.) $8x-4s$, le II.) $8y-2s$, le III.) $8z-s$.

Or chacun ayant maintenant 24 louis, nous avons trois équations, telles que la premiere donne sur le champ x, la seconde y, & la troisieme z; de plus s est connu & $=72$, puisque les trois Joueurs ensemble ont 72 louis à la fin de la derniere partie; mais c'est à quoi il n'est pas même nécessaire de faire attention d'abord, comme on va le voir. Nous avons

I.) $8x-4s=24$, ou $8x=24+4s$, ou $x=3+\frac{1}{2}s$;

II.) $8y-2s=24$, ou $8y=24+2s$, ou $y=3+\frac{1}{4}s$;

III.) $8z-s=24$, ou $8z=24+s$, ou $z=3+\frac{1}{8}s$.

Ajoutant ces trois valeurs, on a

$$x+y+z=9+\frac{7}{8}s.$$

Ainsi, puisque $x+y+z=s$, on a $s=9+\frac{7}{8}s$; donc $\frac{1}{8}s=9$, & $s=72$.

Si on substitue à présent cette valeur de s dans les expressions trouvées pour x, y & z, on trouvera qu'avant que de se mettre au jeu, le premier Joueur avoit 39 louis; le second, 21 louis; & le troisieme, 12 louis.

On voit par cette solution comment, par le secours de la somme des trois inconnues, on surmonte heureusement les obstacles qui se présentent dans la voie ordinaire.

617.

Quoique la question précédente paroisse d'abord assez difficile, nous remarquerons cependant qu'on peut la résoudre, même sans algebre. On n'a qu'à chercher à le faire en rétrogradant. On considérera que puisque les Joueurs, en quittant le jeu,

avoient chacun 24 louis, & que dans la troisieme partie, le premier & le second ont doublé leur argent, ils doivent avoir eu avant cette derniere partie:

le I.)12, le II.)12, & le III.)48.

Dans la seconde partie ce sont le premier & le troisieme qui ont doublé leur argent; donc avant cette partie ils avoient:

le I.)6, le II.)42, le III.)24.

Enfin, dans la premiere partie, le second & le troisieme Joueur ont gagné chacun autant d'argent qu'il en avoit sorti; donc en commençant les trois Joueurs avoient devant eux:

I.)39, II.)21, III.)12.

Ce que nous avons aussi trouvé par la solution précédente.

618.

Cinquieme question. Deux personnes doivent 29 pistoles; elles ont de l'argent toutes les deux, mais pas autant chacune pour pouvoir acquitter seule cette dette commune; le premier Débiteur dit donc au second, si vous me donnez les $\frac{2}{3}$ de votre argent, je payerai seul la dette sur le champ. Le second lui réplique qu'il pourroit aussi acquitter seul la dette, si l'autre lui donnoit les $\frac{3}{4}$ de son argent. On demande combien ils ont l'un & l'autre?

Supposons que le premier ait x pistoles, & que le second ait y pistoles.

Nous aurons d'abord $x+\frac{2}{3}y=29$;

ensuite aussi, $y+\frac{3}{4}x=29$.

La premiere équation donne $x=29-\frac{2}{3}y$, & la seconde donne $x=\frac{116-4y}{3}$; ainsi $29-\frac{2}{3}y=\frac{116-4y}{3}$. On tire de cette équation $y=14\frac{1}{2}$; donc $x=19\frac{1}{3}$.

Réponse. Le premier Débiteur a $19\frac{1}{3}$ pistoles, & le second a $14\frac{1}{2}$ pistoles.

619.

Sixieme question. Trois freres ont acheté une vigne pour cent louis. Le cadet dit

qu'il pourroit la payer ſeul, ſi le ſecond lui donnoit la moitié de l'argent qu'il a; le ſecond dit que ſi l'aîné lui donnoit le tiers ſeulement de ſon argent, il payeroit la vigne ſeul; enfin l'aîné ne demande que le quart de l'argent du cadet, pour payer ſeul la vigne. Combien chacun avoit-il d'argent? Que le premier ait eu x louis; le ſecond, y louis; le troiſieme, z louis; on aura les trois équations ſuivantes:

I.) $x+\frac{1}{2}y=100$. II.) $y+\frac{1}{3}z=100$. III.) $z+\frac{1}{4}x=100$; deux deſquelles ſeulement donnent la valeur de x, ſavoir I.) $x=100-\frac{1}{2}y$, III.) $x=400-4z$. Ainſi on a l'équation:

$100-\frac{1}{2}y=400-4z$, ou $4z-\frac{1}{2}y=300$, qu'il faudra combiner avec la ſeconde, afin de déterminer y & z. Or la ſeconde équation étoit $y+\frac{1}{3}z=100$; on en tire donc $y=100-\frac{1}{3}z$; & l'équation trouvée en dernier lieu étant $4z-\frac{1}{2}y=300$, on a $y=8z-600$. Par conſéquent la derniere équation eſt:

$100-\frac{1}{3}z=8z-600$; ainſi $8\frac{1}{3}z=700$, ou $\frac{25}{3}z=700$, & $z=84$. Donc $y=100-28=72$, & $x=64$.

Réponſe. Le cadet avoit 64 louis, le puîné avoit 72 louis, & l'aîné avoit 84 louis.

620.

Comme dans cet exemple chaque équation ne renferme que deux inconnues, on peut parvenir d'une façon plus commode à la ſolution cherchée.

La premiere équation donne $y=200-2x$; ainſi y eſt déterminé en x; & ſi on ſubſtitue cette valeur dans la ſeconde équation, on a $200-2x+\frac{1}{3}z=100$; donc $\frac{1}{3}z=2x-100$, & $z=6x-300$.

Ainſi z eſt auſſi déterminé en x; & ſi on introduit cette valeur dans la troiſieme équation, on obtient $6x-300+\frac{1}{4}x=100$, où x ſe trouve ſeul & qu'on réduit à $25x-1600=0$, d'où l'on tire $x=64$. Par conſéquent $y=200-128=72$, & $z=384-300=84$.

621.

On peut ſuivre le même procédé, lorſqu'on a un plus grand nombre d'équations. Suppoſons, par exemple, qu'on ait d'une maniere générale: I.) $u+\frac{x}{a}=n$, II.) $x+\frac{y}{b}=n$, III.) $y+\frac{z}{c}=n$, IV.) $z+\frac{u}{d}=n$; ou, en chaſſant les fractions: I.) $au+x=an$, II.) $bx+y=bn$, III.) $cy+z=cn$, IV.) $dz+u=dn$.

Ici la premiere équation donne d'abord $x=an-au$, & cette valeur étant ſubſtituée dans la ſeconde, on a $abn-abu+y=bn$; ainſi $y=bn-abn+abu$; la ſubſtitution de cette valeur dans la troiſieme équation donne $bcn-abcn+abcu+z=cn$; donc $z=cn-bcn+abcn-abcu$; ſubſtituant enfin ceci dans la quatrieme équation, on a $cdn-bcdn+abcdn-abcdu+u=dn$. Ainſi $dn-cdn+bcdn-abcdn=-abcdu+u$, ou bien $(abcd-1)u=abcdn-bcdn+cdn-dn$; d'où l'on tire $u=\frac{abcdn-bcdn+cdn-dn}{abcd-1}=n\frac{(abcd-bcd+cd-d)}{abcd-1}$.

Par conſéquent on aura

$$x=\frac{abcdn-acdn+adn-an}{abcd-1}=n.\frac{(abcd-acd+ad-a)}{abcd-1}.$$
$$y=\frac{abcdn-abdn+abn-bn}{abcd-1}=n.\frac{(abcd-abd+ab-b)}{abcd-1}.$$
$$z=\frac{abcdn-abcn+bcn-cn}{abcd-1}=n.\frac{(abcd-abc+bc-c)}{abcd-1}.$$
$$u=\frac{abcdn-bcdn+cdn-dn}{abcd-1}=n.\frac{(abcd-bcd+cd-d)}{abcd-1}.$$

622.

Septieme queſtion. Un Capitaine a trois compagnies: l'une eſt de Suiſſes, l'autre eſt de Suabes, la troiſieme eſt de Saxons. Il veut donner un aſſaut avec une partie de ces troupes, & il promet une récompenſe de 901 écus ſur le pied ſuivant:

Que chaque Soldat de la compagnie qui montera à l'aſſaut, recevra 1 écu, & que le reſte de l'argent ſera diſtribué également aux deux autres compagnies.

Or il ſe trouve que ſi les Suiſſes donnent l'aſſaut, chaque Soldat des autres compagnies reçoit un demi-écu; que ſi les Suabes vont à l'aſſaut, chacun des autres reçoit $\frac{1}{3}$ écu; enfin, que ſi les Saxons donnent

l'aſſaut, chacun des autres reçoit $\frac{1}{4}$ écu. On demande de combien d'hommes étoit chaque compagnie?

Suppoſons le nombre des Suiſſes $=x$, celui des Suabes $=y$, & celui des Saxons $=z$. Et faiſons de plus $x+y+z=s$, parce qu'il eſt facile de voir que c'eſt le moyen d'abréger conſidérablement le calcul. Si donc les Suiſſes donnent l'aſſaut, leur nombre étant $=x$, celui des autres ſera $s-x$; or ceux-là reçoivent 1 écu, & ceux-ci un demi-écu; ainſi on aura

$$x+\tfrac{1}{2}s-\tfrac{1}{2}x=901.$$

On trouvera de la même maniere que ſi les Suabes donnent l'aſſaut, on a

$$y+\tfrac{1}{3}s-\tfrac{1}{3}y=901.$$

Et enfin que, ſi ce ſont les Saxons qui montent à l'aſſaut, on aura

$$z+\tfrac{1}{4}s-\tfrac{1}{4}z=901.$$

Chacune de ces trois équations ſuffira pour déterminer une des inconnues x, y & z;

car

car la premiere donne $x=1802-s$,
la ſeconde donne $2y=2703-s$,
la troiſieme donne $3z=3604-s$.

Or ſi l'on prend maintenant les valeurs de $6x$, $6y$ & $6z$, & qu'on écrive ces valeurs l'une ſous l'autre, on aura

$$\begin{aligned}6x&=10812-6s,\\ 6y&=8109-3s,\\ 6z&=7208-2s,\end{aligned}$$

& ajoutant: $6s=26129-11s$, ou $17s=26129$; ainſi $s=1532$; c'eſt le nombre total des Soldats, au moyen duquel on trouve

$x=1802-1537=265$;
$2y=2703-1537=1166$, ou $y=583$;
$3x=3604-1537=2067$, ou $z=689$.

Réponſe. La compagnie des Suiſſes eſt de 265 hommes; celle des Suabes, de 583 hommes; & celle des Saxons, de 689 hommes.

CHAPITRE V.

De la résolution des Equations pures du second degré.

623.

On dit qu'une équation est du second degré, quand elle renferme le quarré ou la seconde puissance de l'inconnue, sans qu'on y trouve des puissances plus élevées de cette inconnue. Une équation qui renfermeroit aussi la troisieme puissance de l'inconnue, appartiendroit déjà aux équations cubiques, & sa résolution demanderoit des regles particulieres.

624.

Il n'y a donc que trois especes de termes dans une équation du second degré. En premier lieu les termes où l'inconnue ne se trouve pas du tout, ou qui ne sont composés que de nombres connus.

En second lieu, les termes dans lesquels on rencontre seulement la premiere puissance de la quantité inconnue.

En troisieme lieu, les termes qui contiennent le quarré de la quantité inconnue.

Ainsi x signifiant une quantité inconnue, & les lettres a, b, c, d, &c. représentant des nombres connus, les termes de la premiere espece seront de la forme a, les termes de la seconde espece auront la forme bx, & les termes de la troisieme espece auront la forme cxx.

625.

On a déjà vu suffisamment que deux ou plusieurs termes d'une même espece peuvent se réunir ensemble, & être considérés comme un seul terme.

Par exemple, on peut considérer comme un seul terme la formule $axx-bxx+cxx$, en la représentant par $(a-b+c)xx$; puisqu'en effet $a-b+c$ est une quantité connue.

Et quand même de tels termes se trouveroient des deux côtés du signe $=$, on a vu comment on doit les porter d'un même côté, & les réduire ensuite à un seul terme. Soit, par exemple, l'équation

$$2xx-3x+4=5xx-8x+11\,;$$

on soustrait d'abord $2xx$, & il vient

$$-3x+4=3xx-8x+11\,;$$

ajoutant ensuite $8x$, on obtient

$$5x+4=3xx+11\,;$$

soustrayant enfin 11, il reste $3xx=5x-7$.

626.

On peut aussi transporter tous les termes d'un même côté du signe $=$, de façon qu'il ne reste que o dans l'autre membre; le principal est de faire attention que quand on transporte des termes d'un côté à l'autre, il faut en changer les signes.

C'est ainsi que l'équation ci-dessus prendra cette forme, $3xx-5x+7=0$, & c'est aussi pourquoi on peut représenter toute équation du second degré généralement par cette formule,

$$axx\pm bx\pm e=0,$$

dans laquelle le signe $\pm$ se prononce *plus ou moins*, & indique que de tels termes peuvent être tantôt positifs & tantôt négatifs.

627.

Quelle forme qu'ait primitivement une équation du second degré, on peut toujours la réduire à cette formule de trois termes: qu'on soit parvenu, par exemple, à l'équation

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ex+f}{gx+h},$$

il faudra, avant toute chose, chasser les fractions: multipliant pour cet effet d'abord par $cx+d$, on a $ax+b=\frac{cexx+cfx+edx+fd}{gx+h}$, ensuite par $gx+h$, on a

$$agxx+bgx+ahx+bh=cexx+cfx+edx+fd,$$

ce qui est une équation du second degré, & qu'on réduit aux trois termes suivans, que nous transposerons en les rangeant de la maniere qui est le plus en usage:

$$0 = agxx + bgx + bh,$$
$$- cexx + ahx - fd,$$
$$- cfx,$$
$$- edx.$$

On peut représenter aussi cette équation de la maniere suivante, qui est même plus claire :

$$0 = (ag - ce)xx + (bg + ah - cf - ed)x + bh - fd.$$

628.

Ces équations du second degré, où toutes les trois especes de termes se trouvent, se nomment *completes*, & leur résolution est aussi sujette à plus de difficultés ; c'est pourquoi nous commencerons par considérer celles où un de ces termes manque.

Or si c'étoit le terme xx qui ne se trouvât pas dans l'équation, elle ne seroit pas du second degré, mais elle appartiendroit à celles dont nous avons traité ; que si c'étoit le terme qui ne contient que des nombres connus, qui manquât, l'équation auroit cette forme, $axx \pm bx = 0$, laquelle

étant divisible par x, se réduit à $ax \pm b = 0$, qui est pareillement une équation du premier degré, & n'appartient pas ici.

629.

Mais lorsque c'est le terme moyen, lequel contient la premiere puissance de x, qui manque, l'équation revêt cette forme, $axx \pm c = 0$, ou $axx = \mp c$; le signe de c pouvant être soit positif, soit négatif.

Nous appellerons une telle équation, une équation du second degré *pure*, par la raison que sa résolution ne souffre aucune difficulté. En effet, on n'a qu'à diviser par a, on obtient $xx = \frac{c}{a}$; & prenant de part & d'autre la racine quarrée, on trouve $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$; au moyen de quoi l'équation est résolue.

630.

Mais nous avons à présent trois cas à considérer ici. Le premier, quand $\frac{c}{a}$ est un nombre quarré, dont on puisse par consé-

quent assigner réellement la racine, on obtient dans ce cas pour la valeur de x un nombre rationnel, lequel peut être ou entier ou rompu. Par exemple, l'équation $xx=144$, donne $x=12$; & celle-ci, $xx=\frac{9}{16}$, donne $x=\frac{3}{4}$.

Le second cas a lieu, quand $\frac{c}{a}$ n'est pas un quarré, dans lequel cas par conséquent il faut se contenter du signe $\sqrt{}$. Si, par exemple, $xx=12$, on a $x=\sqrt{12}$, dont la valeur peut se déterminer par approximation, comme nous l'avons fait voir plus haut.

Le troisieme cas enfin est celui où $\frac{a}{c}$ devient un nombre négatif; alors la valeur de x est tout-à-fait impossible & imaginaire, & ce résultat prouve que la question qui a conduit à une telle équation, est impossible d'elle-même.

631.

Nous observerons encore, avant que d'aller plus loin, que toutes les fois qu'il

est question d'extraire la racine quarrée d'un nombre, cette racine a toujours deux valeurs, dont l'une est positive & l'autre négative. Nous avons déjà fait remarquer cela plus haut. Qu'on ait l'équation $xx=49$, la valeur de x ne sera pas seulement $+7$, mais aussi -7, ce qu'on indique par $x=\pm 7$. Ainsi toutes ces questions admettent une solution double; mais on remarquera cependant que dans plusieurs cas, dans ceux, par exemple, où il s'agit d'un certain nombre d'hommes, l'on comprend bien que la valeur négative ne sauroit avoir lieu.

632.

Dans le cas précédent même, où c'est la quantité connue qui manque, les équations, $axx=bx$, ne laissent pas d'admettre deux valeurs de x, quoiqu'on n'en trouve qu'une seule, si l'on divise par x. Car si l'on a, par exemple, l'équation $xx=3x$, où il s'agit d'assigner pour x une valeur telle, que xx devienne égal à $3x$, cela se fait

en supposant $x=3$, valeur qu'on trouve en divisant l'équation par x; mais outre cette valeur il en est encore une autre qui satisfait également, c'est $x=0$; car alors $xx=0$, & $3x=0$. Toutes les équations du second degré en général admettent deux résolutions, tandis qu'une seule solution peut avoir lieu pour les équations du premier degré.

Nous allons maintenant éclaircir par quelques exemples ce que nous avons dit sur les équations du second degré pures.

633.

Premiere question. On cherche un nombre dont la moitié, multipliée par le tiers, fasse 24?

Soit ce nombre $=x$: il faut que $\frac{1}{2}x$, multiplié par $\frac{1}{3}x$, donne 24; on aura donc l'équation $\frac{1}{6}xx=24$.

Multipliant par 6, on a $xx=144$; & l'extraction de la racine donne $x=\pm 12$.

On met $\pm$; car si $x=+12$, on a $\frac{1}{2}x=6$, & $\frac{1}{3}x=4$, & le produit de ces deux nombres est 24; & si $x=-12$, on a $\frac{1}{2}x=-6$, & $\frac{1}{3}x=-4$, dont le produit est également 24.

634.

Seconde question. On cherche un nombre tel, qu'en y ajoutant 5, & en en retranchant 5, le produit de la somme par la différence soit $=96$.

Soit ce nombre x, il faudra que $x+5$, multiplié par $x-5$, donne 96; d'où résulte l'équation $xx-25=96$.

Ajoutant 25, on a $xx=121$; & extrayant la racine, il vient $x=11$. Ainsi $x+5=16$, & $x-5=6$; or en effet $6.16=96$.

635.

Troisieme question. On cherche un nombre tel, qu'en l'ajoutant à 10, & en le retranchant de 10, la somme multipliée par le reste ou par la différence, donne 51.

Que x ſoit ce nombre ; il faut que $10+x$, multiplié par $10-x$, faſſe 51, & qu'ainſi $100-xx=51$. Ajoutant xx, & ſouſtrayant 51, on a $xx=49$, dont la racine quarrée donne $x=7$.

636.

Quatrieme queſtion. Trois Joueurs qui ont fait une partie, ſe retirent ; le premier avec autant de fois 7 écus, que le ſecond a de fois trois écus ; & le ſecond avec autant de fois 17 écus, que le troiſieme a de fois 5 écus ; & ſi on multiplie l'argent du premier par l'argent du ſecond, & l'argent du ſecond par l'argent du troiſieme, & enfin l'argent du troiſieme par l'argent du premier, la ſomme de ces trois produits eſt $3830\frac{2}{3}$. Combien d'argent ont-ils chacun?

Suppoſons que le premier Joueur ait x écus ; & puiſqu'il a autant de fois 7 écus, que le ſecond a de fois 3 écus, cela ſignifie que ſon argent eſt à celui du ſecond, en raiſon de 7:3.

On fera donc $7:3=x$, à l'argent du ſecond Joueur, qui eſt donc $\frac{3}{7}x$.

De plus, comme l'argent du ſecond Joueur eſt à celui du troiſieme en raiſon de 17:5, on dira $17:5=\frac{3}{7}x$ à l'argent du troiſieme Joueur, ou à $\frac{15}{119}x$.

Multipliant à préſent x, ou l'argent du premier Joueur, par $\frac{3}{7}x$, l'argent du ſecond, on a le produit $\frac{3}{7}xx$.

Après cela, $\frac{3}{7}x$, l'argent du ſecond, multiplié par l'argent du troiſieme, ou par $\frac{15}{119}x$, donne $\frac{45}{833}xx$. Enfin l'argent du troiſieme, ou $\frac{15}{119}x$, multiplié par x, ou l'argent du premier, donne $\frac{15}{119}xx$. La ſomme de ces trois produits eſt $\frac{3}{7}xx+\frac{45}{833}xx+\frac{15}{119}xx$; & en réduiſant au même dénominateur, on la trouve $=\frac{507}{833}xx$, ce qui doit équivaloir au nombre $3830\frac{2}{3}$.

On a donc $\frac{507}{833}xx=3830\frac{2}{3}$.

Ainſi $\frac{1521}{833}xx=11492$, & $1521xx$ étant égal à 9572836, diviſant par 1521, on

a $xx = \frac{9572836}{1521}$; & en prenant la racine, on trouve $x = \frac{3094}{39}$. Cette fraction est encore réductible à de moindres termes, en divisant par 13; ainsi $x = \frac{238}{3} = 79\frac{1}{3}$; & on conclut de-là que $\frac{3}{7}x = 34$, & que $\frac{15}{119}x = 10$.

Réponse. Le premier Joueur a $79\frac{1}{3}$ écus, le second a 34 écus, & le troisieme se retire avec 10 écus.

Remarque. Ce calcul peut se faire encore d'une maniere plus facile; savoir, en prenant les facteurs des nombres qui s'y présentent, & en faisant attention principalement aux quarrés de ces facteurs.

On voit que $507 = 3.169$, & que 169 est le quarré de 13; ensuite, que $833 = 7.119$, & que $119 = 7.17$. Or on a $\frac{3.169}{17.49}xx = 3830\frac{2}{3}$, & si on multiplie par 3, on a $\frac{9.169}{17.49}xx = 11492$. Qu'on résolve aussi ce nombre en ses facteurs; on voit d'abord que le premier est 4, c'est-à-dire, que $11492 = 4.2873$; de plus 2873 est divisible par

17, de sorte que $2873 = 17.169$. Par conséquent notre équation aura la forme suivante: $\frac{9.169}{17.49}xx = 4.17.169$, laquelle, divisée par 169, se réduit à $\frac{9}{17.49}xx = 4.17$; multipliant de plus par 17.49, & divisant par 9, on a $xx = \frac{4.289.49}{9}$, où tous les facteurs sont des quarrés; d'où il suit qu'on a, sans autre calcul, la racine $x = \frac{2.17.7}{3} = \frac{238}{3}$, comme ci-devant.

637.

Cinquieme question. Quelques Négocians établissent un Facteur à Archangel. Chacun d'eux contribue pour le commerce qu'ils ont en vue, dix fois autant d'écus qu'ils sont d'Associés. Le profit du Facteur est fixé à deux fois autant d'écus qu'il y a d'Associés pour 100 écus. Et si l'on multiplie la $\frac{1}{100}$ partie de son gain total par $2\frac{2}{9}$, on trouve le nombre des Associés. On demande quel est ce nombre?

Soit ce nombre $= x$; & puisque chaque

Associé a fourni $10x$, le capital entier est $=10xx$. Or avec chaque centaine d'écus le Facteur gagne $2x$, son profit sera donc $\frac{1}{5}x^3$ avec le capital $10xx$. La $\frac{1}{100}$ partie de ce gain est $\frac{1}{500}x^3$; multipliant par $2\frac{2}{9}$, ou par $\frac{20}{9}$, on a $\frac{20}{4500}x^3$, ou $\frac{1}{225}x^3$, & c'est ce qui doit être égal au nombre des Associés x.

On a donc l'équation $\frac{1}{225}x^3=x$, ou $x^3=225x$; elle paroît d'abord être du troisieme degré; mais comme on peut diviser par x, elle se réduit à l'équation du second degré $xx=225$, d'où l'on tire $x=15$.

Réponse. Il y a quinze Associés, & chacun a contribué 150 écus.

CHAPITRE

CHAPITRE VI.

De la résolution des Equations mixtes du second degré.

638.

On dit d'une équation du second degré, qu'elle est *mixte* ou complette, lorsqu'on y rencontre trois especes de termes, savoir celle qui contient le quarré de la quantité inconnue, comme axx; celle où l'inconnue se trouve seulement élevée à la premiere puissance, comme bx; enfin l'espece de termes qui n'est composée que de quantités connues. Et puisqu'on peut réunir deux ou plusieurs termes d'une même espece en un seul, & qu'on peut porter tous les termes d'un même côté du signe $=$, la forme de l'équation mixte du second degré sera celle-ci:

$$axx\mp bx\mp c=0.$$

Nous montrerons dans ce Chapitre com-

ment on doit tirer la valeur de x de ces sortes d'équations ; on verra qu'il y a deux routes pour y parvenir.

639.

Une équation de l'espece dont il s'agit, peut se réduire, par le moyen de la division, à une forme telle, que le premier terme ne contienne purement que le quarré xx de l'inconnue x. On laissera le second terme du même côté où est x, & le terme connu on le portera de l'autre côté du signe $=$. Notre équation prendra de cette maniere la forme $xx \pm px = \pm q$, où p & q signifient des nombres connus quelconques, positifs ou négatifs ; & tout se réduit à présent à déterminer la vraie valeur de x. Nous commencerons par remarquer que si $xx + px$ étoit un quarré effectif, la résolution n'auroit aucune difficulté, parce qu'il ne s'agiroit que de prendre des deux côtés la racine quarrée.

640.

Mais il est clair que $xx + px$ ne sauroit être un quarré, puisque nous avons vu plus haut que si une racine est de deux termes, par exemple $x+n$, son quarré contient toujours trois termes, savoir, outre le quarré de chaque partie, encore le double du produit des deux parties ; c'est-à-dire, que le quarré de $x+n$ est $xx + 2nx + nn$. Or nous avons déjà d'un côté $xx + px$, nous pouvons donc regarder xx comme le quarré de la premiere partie de la racine, & il faut en ce cas que px représente le double du produit de la premiere partie x de la racine par la seconde partie ; par conséquent cette seconde partie doit être $\frac{1}{2}p$, & en effet le quarré de $x + \frac{1}{2}p$ se trouve être $xx + px + \frac{1}{4}pp$.

641.

Or $xx + px + \frac{1}{4}pp$ étant un quarré réel qui a pour racine $x + \frac{1}{2}p$, si nous repre-

nons notre équation $xx+px=q$, nous n'avons qu'à ajouter de part & d'autre $\frac{1}{4}pp$, ce qui nous donne $xx+px+\frac{1}{4}pp=q+\frac{1}{4}pp$, où le premier membre eſt effectivement un quarré, & où l'autre membre ne renferme que des quantités connues. Si donc nous prenons des deux côtés la racine quarrée, nous trouvons $x+\frac{1}{2}p=\sqrt{(\frac{1}{4}pp+q)}$; & ſouſtrayant $\frac{1}{2}p$, nous obtenons $x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$; & comme toute racine quarrée peut être priſe ſoit affirmativement, ſoit négativement, nous aurons pour x deux valeurs exprimées de cette maniere:

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}.$$

642.

Voilà la formule qui contient la regle, d'après laquelle toutes les équations du ſecond degré peuvent être réſolues, & il ſera bon d'en imprimer la ſubſtance dans la mémoire, afin qu'on n'ait pas beſoin de répéter à chaque fois toute l'opération que

nous venons de faire. On pourra toujours ordonner l'équation, de façon que le quarré pur xx ſe trouve d'un ſeul côté, & qu'ainſi l'équation ci-deſſus ait la forme $xx=-px+q$, où l'on voit alors ſur le champ que $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$.

643.

La regle générale que nous déduiſons de-là pour réſoudre l'équation $xx=-px+q$, conſiſte donc en ceci:

Que la quantité inconnue x eſt égale à la moitié du nombre qui multiplie x dans l'autre membre de l'équation, *plus* ou *moins* la racine quarrée du quarré du nombre que l'on vient de dire, & de la quantité connue qui forme le troiſieme terme de l'équation.

C'eſt ainſi que ſi on avoit l'équation $xx=6x+7$, on diroit auſſi-tôt que $x=3\pm\sqrt{9+7}=3\pm4$, d'où réſultent ces deux valeurs de x, I.) $x=7$; II.) $x=-1$. Pareillement l'équation $xx=10x-9$, don-

neroit $x=5\pm\sqrt{25-9}=5\pm4$, c'eſt-à-dire que les deux valeurs de x ſont 9 & 1.

644.

On ſe mettra encore mieux au fait de cette regle en diſtinguant les cas ſuivans: I.) ſi p eſt un nombre pair; II.) ſi p eſt un nombre impair; & III.) ſi p eſt un nombre rompu.

Soit I.) p un nombre pair, & l'équation telle que, $xx=2px+q$, on aura $x=p\pm\sqrt{pp+q}$.

Soit II.) p un nombre impair, & l'équation $xx=px+q$, on aura $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$; & puiſque $\frac{1}{4}pp+q=\frac{pp+4q}{4}$, on pourra extraire la racine quarrée de ce dénominateur, & écrire $x=\frac{1}{2}p\pm\frac{\sqrt{pp+4q}}{2}=\frac{p\pm\sqrt{pp+4q}}{2}$.

Enfin III.) Soit p une fraction, on pourra réſoudre l'équation de la maniere qui ſuit: Que l'équation en queſtion ſoit celle-ci, $axx=bx+c$, ou $xx=\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}$, on aura, par la regle, $x=\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{bb}{4aa}+\frac{c}{a}}$. Or $\frac{bb}{4aa}+\frac{c}{a}=\frac{bb+4ac}{4aa}$, où le dénominateur eſt un quarré; ainſi $x=\frac{b\pm\sqrt{bb+4ac}}{2a}$.

645.

L'autre voie qui conduit à la réſolution des équations du ſecond degré mixtes, eſt de les transformer en des équations pures. Cela ſe fait en ſubſtituant, par exemp. dans l'équation $xx=px+q$, à la place de l'inconnue x, une autre inconnue y, telle que $x=y+\frac{1}{2}p$; au moyen de quoi, quand on a déterminé y, on trouve auſſi-tôt la valeur de x.

Si nous faiſons cette ſubſtitution de $y+\frac{1}{2}p$ à la place de x, nous avons $xx=yy+py+\frac{1}{4}pp$, & $px=py+\frac{1}{2}pp$; par conſéquent notre équation ſe change en celle-ci: $yy+py+\frac{1}{4}pp=py+\frac{1}{2}pp+q$, qui ſe réduit, en ſouſtrayant py, d'abord à $yy+\frac{1}{4}pp=\frac{1}{2}pp+q$; & enſuite, en ſouſtrayant $\frac{1}{4}pp$, à $yy=\frac{1}{4}pp+q$. Ceci eſt une équation du ſecond degré pure, qui donne auſſi-

tôt $y=\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$. Or puisque $x=y+\frac{1}{2}p$, on a $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$, ainsi que nous l'avons trouvé ci-dessus. Il ne nous reste donc qu'à éclaircir cette regle par quelques exemples.

646.

Premiere question. J'ai deux nombres; l'un surpasse l'autre de 6, & leur produit est 91. Quels sont ces nombres?

Si le plus petit est x, l'autre est $x+6$, & leur produit $91=xx+6x$.

Soustrayant $6x$, il reste $xx=91-6x$, & la regle donne $x=-3\pm\sqrt{9+91}=-3\pm10$; ainsi $x=7$, & $x=-13$.

Rép. La question admet deux solutions:

Suivant l'une, le plus petit nombre x est $=7$, & le plus grand $x+6=13$.

Suivant l'autre, le plus petit nombre $x=-13$, & le plus grand $x+6=-7$.

647.

Seconde question. Trouver un nombre tel que, si de son quarré je retranche 9,

il me vienne un nombre qui soit d'autant d'unités plus grand que 100, que le nombre cherché est plus petit que 23.

Soit le nombre cherché $=x$; je vois que $xx-9$ surpasse 100 de $xx-109$. Et puisque x est au dessous de 23 de $23-x$, j'aurai cette équation: $xx-109=23-x$.

Donc $xx=-x+132$, &, par la regle, $x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+132}$, $=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{529}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{23}{2}$. Ainsi $x=11$ & $x=-12$.

Réponse. Lorsqu'on ne demande qu'un nombre positif, ce nombre cherché est 11, dont le quarré moins 9 est 112, & par conséquent de 12 plus grand que 100, de même que 11 est de 12 plus petit que 23.

648.

Troisieme question. Trouver un nombre tel, que si on multiplie sa moitié par son tiers, & qu'au produit on ajoute la moitié du nombre qu'on cherche, le résultat soit 30.

Qu'on ſuppoſe ce nombre $=x$, ſa moitié, multipliée par ſon tiers, fera $\frac{1}{6}xx$; il faut donc que $\frac{1}{6}xx+\frac{1}{2}x=30$. Multipliant par 6, on a $xx+3x=180$, ou $xx=-3x+180$, ce qui donne $x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+180}=-\frac{3}{2}\pm\frac{27}{2}$.

Par conſéquent x eſt ou $=12$, ou égal -15.

649.

Quatrieme queſtion. Trouver deux nombres qui ſoient en proportion double, & tels que ſi on ajoute leur ſomme à leur produit, on obtienne 90.

Soit l'un des nombres $=x$, & le plus grand $=2x$, leur produit ſera $=2xx$, & ſi on y ajoute $3x$ ou leur ſomme, la nouvelle ſomme doit faire 90. Ainſi $2xx+3x=90$; $2xx=90-3x$; $xx=-\frac{3}{2}x+45$, d'où l'on tire $x=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}+45}=-\frac{3}{4}\pm\frac{27}{4}$.

Par conſéquent $x=6$, ou $x=-7\frac{1}{2}$.

650.

Cinquieme queſtion. Un Maquignon qui a acheté un cheval pour un certain nombre d'écus, le revend pour 119 écus, & il gagne autant pour cent écus, que le cheval lui a coûté. On demande ce qu'il en avoit payé?

Suppoſons que le cheval ait coûté x écus; comme le Maquignon y gagne x pour cent, on dira 100 donnent le profit x: que donne x? *Réponſe*, $\frac{xx}{100}$. Puis donc qu'il a gagné $\frac{xx}{100}$ & que le cheval lui coûte x écus d'achat, il faut qu'il l'ait vendu pour $x+\frac{xx}{100}$; donc $x+\frac{xx}{100}=119$. Souſtrayant x, on a $\frac{xx}{100}=-x+119$; & multipliant par 100, il vient $xx=-100x+11900$. Appliquant maintenant la regle, on trouve $x=-50\pm\sqrt{2500+11900}=-50\pm\sqrt{14400}=-50\pm120$.

Réponſe. Le cheval a coûté 70 écus, & puiſque le Maquignon a gagné 70 pour

cent en le revendant, le profit doit avoir été de 49 écus. Le cheval doit, par conséquent, avoir été revendu en effet pour 70 + 49, c'est-à-dire pour 119 écus.

651.

Sixieme question. Quelqu'un achete un certain nombre de pieces de drap; il paye pour la premiere 2 écus; pour la seconde, 4 écus; pour la troisieme, 6 écus, & de même toujours 2 écus de plus pour les suivantes; & toutes les pieces ensemble lui coûtent 110 écus. Combien y avoit-il de pieces?

Soit le nombre cherché $=x$; & voici le plan de ce que l'Acheteur a payé pour les différentes pieces:

pour la 1, 2, 3, 4, 5 x
il paye 2, 4, 6, 8, 10 $2x$ écus.

Il s'agit par conséquent de sommer la progression arithmétique $2+4+6+8+10+\ldots\ldots 2x$, qui est de x termes, afin d'en déduire le prix de toutes les pieces de drap

prises ensemble. La regle que nous avons donnée plus haut pour cette opération, exige qu'on ajoute le dernier terme & le premier. La somme est $2x+2$; qu'on multiplie cette somme par le nombre des termes x, le produit est $2xx+2x$; qu'on divise enfin par la différence 2, le quotient est $xx+x$, c'est la somme de la progression; ainsi l'on a $xx+x=110$; donc $xx=-x+110$, & $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+110}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{441}{4}}=-\frac{1}{2}+\frac{21}{2}=10$.

Réponse. Le nombre des pieces de drap achetées est 10.

652.

Septieme question. Quelqu'un a acheté plusieurs pieces de drap pour 180 écus. S'il avoit reçu pour la même somme 3 pieces de plus, il auroit eu la piece à meilleur marché de 3 écus. Combien a-t-il acheté de pieces?

Faisons le nombre cherché $=x$; chaque piece aura coûté réellement $\frac{180}{x}$ écus. Or si

l'Acheteur avoit eu $x+3$ pieces pour 180 écus, la piece lui seroit revenue à $\frac{180}{x+3}$ écus; & puisque ce prix est moindre de 3 écus que le prix réel, il faut que nous ayons l'équation,

$$\frac{180}{x+3}=\frac{180}{x}-3.$$

Multipliant par x, nous avons $\frac{180x}{x+3}=180-3x$; divisant par 3, l'on a $\frac{60x}{x+3}=60-x$; multipliant par $x+3$, nous aurons $60x=180+57x-xx$; ajoutant xx, l'on aura $xx+60x=180+57x$; soustrayant $60x$, nous aurons $xx=-3x+180$.

La regle donne par conséquent $x=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}+180}$, ou $x=-\frac{3}{2}+\frac{27}{2}=12$.

Réponse. On a acheté pour 180 écus 12 pieces de drap à 15 écus la piece, & si on eût obtenu 3 pieces de plus, savoir 15 pieces pour 180 écus, la piece ne seroit revenue qu'à 12 écus, c'est-à-dire, à 3 écus de moins.

653.

Huitieme question. Deux Marchands entrent en société avec un fonds de 100 écus; l'un laisse son argent dans la société pendant trois mois, l'autre laisse le sien pendant deux mois, & chacun retire 99 écus de capital & d'intérêts. On demande quelle part chacun avoit fourni au fonds?

Supposons que le premier Associé ait contribué x écus, l'autre aura contribué $100-x$. Or celui-là retirant 99 écus, son profit est $99-x$, qu'il aura acquis en trois mois avec le capital x; & puisque le second retire pareillement 99 écus, son profit est $x-1$, qu'il aura acquis en deux mois de temps avec le capital $100-x$; & il est clair que le profit de ce second Associé eût été $\frac{3x-3}{2}$, s'il avoit resté trois mois dans la société. Maintenant, comme les profits acquis dans le même temps sont proportionnels aux capitaux, nous avons évidemment $x:99-x=100-x:\frac{3x-3}{2}$.

L'égalité du produit des extrêmes & de celui des moyens, donne l'équation

$$\frac{3xx-3x}{2}=9900-199x+xx;$$

multipliant par 2, nous aurons $3xx-3x=19800-398x+2xx$; soustrayant $2xx$, l'on aura $xx-3x=19800-398x$; ajoutant $3x$, nous aurons $xx=19800-395x$.

Donc par la regle

$$x=-\frac{395}{2}+\sqrt{\frac{156025}{4}+\frac{79200}{4}}=-\frac{395}{2}+\frac{485}{2}$$
$$=\frac{90}{2}=45.$$

Réponse. Le premier Associé a contribué 45 écus, & l'autre 55 écus. Le premier ayant gagné en trois mois 54 écus, auroit gagné en un mois 18 écus; & le second ayant gagné en deux mois 44 écus, auroit gagné en un mois 22 écus: or ces deux profits s'accordent; car, si avec 45 écus on gagne 18 écus dans un mois de temps, on gagnera dans le même temps 22 écus avec 55 écus.

654.

654.

Neuvieme question. Deux Paysannes portent ensemble 100 œufs au marché; l'une en porte plus que l'autre, & cependant le produit est le même pour l'une & pour l'autre. La premiere dit à la seconde: Si j'avois eu tes œufs, j'aurois retiré 15 sous. L'autre lui répond: Si j'avois eu les tiens, j'aurois retiré $6\frac{2}{3}$ sous. Combien d'œufs chacune a-t-elle portés au marché?

Que la premiere ait eu x œufs, la seconde en aura eu $100-x$.

Puis donc que celle-là eût vendu $100-x$ œufs pour 15 sous, on fera la regle de trois suivante:

$$100-x:15=x\ldots\text{ à }\frac{15x}{100-x}\text{ sous.}$$

De même, puisque la seconde eût vendu x œufs pour $6\frac{2}{3}$ sous, on trouvera combien $100-x$ œufs lui eussent rendu, en disant

$$x:\frac{20}{3}=100-x\ldots\text{ à }\frac{2000-20x}{3x}.$$

Or les deux Payſannes ont retiré autant d'argent l'une que l'autre ; nous avons par conſéquent l'équation, $\frac{15x}{100-x} = \frac{2000-20x}{3x}$, qui ſe réduit à celle-ci,

$$25xx = 200000 - 4000x ;$$

& enfin à celle-ci,

$$xx = -160x + 8000 ;$$

d'où l'on tire

$$x = -80 + \sqrt{6400 + 8000} = -80 + 120 = 40.$$

Réponſe. La premiere Payſanne avoit 40 œufs, la ſeconde en avoit 60, & chacune a retiré 10 ſous.

655.

Dixieme queſtion. Deux Marchands vendent chacun d'une certaine étoffe ; le ſecond en vend 3 aunes de plus que le premier, & ils tirent enſemble 35 écus. Le premier dit au ſecond : J'aurois retiré de votre étoffe 24 écus ; l'autre répond, & moi j'aurois retiré de la vôtre 12 écus & demi. Combien d'aunes avoient-ils chacun ?

Suppoſons que le premier ait eu x aunes, le ſecond aura eu $x + 3$ aunes. Or puiſque le premier eût vendu $x + 3$ aunes pour 24 écus, il faut qu'il ait retiré $\frac{24x}{x+3}$ écus de ſes x aunes. Et quant au ſecond, puiſqu'il eût débité x aunes pour $12\frac{1}{2}$ écus, il faut qu'il ait vendu ſes $x + 3$ aunes pour $\frac{25x+75}{2x}$; ainſi la ſomme totale qu'ils ont retirée eſt $\frac{24x}{x+3} + \frac{25x+75}{2x} = 35$ écus.

Cette équation ſe réduit à $xx = 20x - 75$, d'où l'on tire $x = 10 \pm \sqrt{100 - 75} = 10 \pm 5$.

Réponſe. La queſtion a deux ſolutions : ſuivant la premiere, le premier Marchand avoit 15 aunes, & le ſecond en avoit 18 ; & puiſque celui-là eût vendu 18 aunes pour 24 écus, il aura vendu ſes 15 aunes pour 20 écus ; le ſecond, qui eût vendu 15 aunes pour 12 écus & demi, aura vendu ſes 18 aunes 15 écus ; donc en effet ils ont tiré 35 écus de leur marchandiſe.

Suivant la ſeconde ſolution, le premier

Marchand avoit 5 aunes, & l'autre 8 aunes; ainsi, puisque le premier eût débité 8 aunes pour 24 écus, il aura retiré 15 écus de ses 5 aunes; & le second, puisqu'il eût vendu 5 aunes pour 12 écus & demi, ses 8 aunes lui auront rendu 20 écus. La somme est encore 35 écus.

CHAPITRE VII.

De l'extraction des Racines des nombres polygones.

656.

Nous avons fait voir plus haut comment on doit déterminer les nombres polygones; or ce que nous avons nommé alors *un côté*, s'appelle aussi *une racine*. Si donc on indique la racine par x, on trouvera ce qui suit pour tous les nombres polygones:

le III gone, ou le triangle, est $\frac{xx+x}{2}$,

le IV gone, ou le quarré, xx,

le V gone — — — — — — $\frac{3xx-x}{2}$,

le VI gone — — — — — — $2xx-x$,

le VII gone — — — — — — $\frac{5xx-3x}{2}$,

le VIII gone — — — — — $3xx-2x$,

le IX gone — — — — — — $\frac{7xx-5x}{2}$,

le X gone — — — — — — $4xx-3x$,

le n gone — — — — — — $\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}$.

657.

Nous avons fait voir suffisamment plus haut, qu'il est facile, par le moyen de ces formules, de trouver, pour une racine donnée quelconque, un nombre polygone cherché. Mais lorsqu'il s'agit de trouver réciproquement le côté, ou la racine d'un polygone dont on connoît le nombre des côtés, l'opération est plus difficile & demande toujours la résolution d'une

équation du second degré. Cela fait que cet article mérite d'être traité ici séparément. Nous le ferons par ordre, en commençant par les nombres triangulaires, & en passant de-là à ceux d'un plus grand nombre d'angles.

658.

Soit donc 91 le nombre triangulaire donné, & duquel on cherche le côté ou la racine.

Si nous faisons cette racine $=x$, il faut que $\frac{xx+x}{2}$ soit $=91$; que $xx+x=182$, & $xx=-x+182$, & par conséquent que $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+182}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{729}{4}}$ $=-\frac{1}{2}+\frac{27}{2}=13$. Nous en concluons que la racine trigonale cherchée est 13; car le triangle de 13 est 91.

659.

Mais soit en général a le nombre trigonal donné, & qu'on en cherche la racine.

Si on la fait $=x$, on a $\frac{xx+x}{2}=a$, ou $xx+x=2a$; donc $xx=-x+2a$, & par la regle, $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+2a}$, ou $x=-\frac{1+\sqrt{8a+1}}{2}$.

Ce résultat donne la regle qui suit: Pour trouver une racine trigonale, il faut multiplier par 8 le nombre trigonal donné, ajouter 1 au produit, extraire la racine de la somme, soustraire 1 de cette racine, & diviser enfin le reste par 2.

660.

On voit par-là que tous les nombres trigonaux ont la propriété, que si on les multiplie par 8, & qu'on ajoute l'unité au produit, la somme est toujours un quarré: la petite table qui suit en donne quelques exemples.

Triangles : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 &c.
8 fois + 1 : 9, 25, 49, 81, 121, 169, 225, 289, 361, 441 &c.

On remarquera que si le nombre donné a ne satisfait pas à cette condition, c'est

ſigne que ce n'eſt pas un nombre trigonal réel, ou qu'on ne peut en indiquer une racine rationnelle.

661.

Qu'on cherche, ſuivant cette regle, la racine trigonale de 210, on aura $a=210$ & $8a+1=1681$, dont la racine quarrée eſt 41; d'où l'on voit que le nombre 210 eſt réellement triangulaire, & que ſa racine eſt $=\frac{41-1}{2}=20$. Mais ſi on donnoit pour trigonal le nombre 4, & qu'on propoſât d'en aſſigner la racine, elle ſe trouveroit $=\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{1}{2}$, & par conſéquent irrationnelle; cependant on trouve réellement le triangle de cette racine $\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{1}{2}$, de la maniere qui ſuit:

Puiſque $x=\frac{\sqrt{33}-1}{2}$, on a $xx=\frac{17-\sqrt{33}}{2}$, & en y ajoutant x, la ſomme eſt $xx+x=\frac{16}{2}=8$, & par conſéquent le triangle, ou le nombre trigonal $\frac{xx+x}{2}=4$.

662.

Les nombres tétragones étant la même choſe que les quarrés, ils ne cauſent aucune difficulté. Car ſuppoſons le nombre tétragone donné $=a$, & ſa racine cherchée $=x$, nous aurons $xx=a$, & par conſéquent $x=\sqrt{a}$; de ſorte que la racine quarrée & la racine tétragone ſont la même choſe.

663.

Paſſons donc aux nombres pentagones.

Soit 22 un nombre de cette eſpece, & x ſa racine; il faudra que $\frac{3xx-x}{2}=22$, ou $3xx-x=44$, ou $xx=\frac{1}{3}x+\frac{44}{3}$. On tire de-là $x=\frac{1}{6}+\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{44}{3}}$, ou $x=\frac{1+\sqrt{529}}{6}$ $=\frac{1}{6}+\frac{23}{6}=4$.

Donc 4 eſt la racine pentagone du nombre 22.

664.

Qu'on propoſe maintenant la queſtion: étant donné le pentagone a, trouver ſa racine.

Soit cette racine $=x$, on aura l'équation $\frac{3xx-x}{2}=a$, ou $3xx-x=2a$, ou $xx=\frac{1}{3}x+\frac{2a}{3}$; au moyen de quoi on trouve $x=\frac{1}{6}+\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{2a}{3}}$, c'est-à-d. $x=\frac{1+\sqrt{24a+1}}{6}$. Lors donc que a est un pentagone effectif, il faut que $24a+1$ soit un quarré.

Que 330 soit, par exemple, le pentagone donné, la racine sera $x=\frac{1+\sqrt{7921}}{6}=\frac{1+89}{6}=15$.

665.

Soit à présent a un nombre hexagone donné, & qu'on en cherche la racine.

Si on la suppose $=x$, on aura $2xx-x=a$, ou $xx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a$; d'où l'on tire $x=\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}a}=\frac{1+\sqrt{8a+1}}{4}$. Ainsi pour que a soit réellement un hexagone, il faut que $8a+1$ devienne un quarré; d'où l'on voit que tous les nombres hexagones sont compris dans les trigonaux; mais il n'en est pas de même des racines.

Soit, par exemple, le nombre hexagone

1225, sa racine sera $x=\frac{1+\sqrt{9801}}{4}=\frac{1+99}{4}=25$.

666.

Supposons a un nombre heptagone, duquel il soit question de trouver le côté ou la racine.

Soit cette racine $=x$, on aura $\frac{5xx-3x}{2}=a$, ou $xx=\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}a$, ce qui donne $x=\frac{3}{10}+\sqrt{\frac{9}{100}+\frac{2}{5}a}=\frac{3+\sqrt{40a+9}}{10}$. Tous les nombres heptagones ont par conséquent la propriété, que si on les multiplie par 40 & qu'on ajoute 9 au produit, la somme est toujours un quarré.

Soit, par exemple, le heptagone 2059; on trouvera sa racine $=x=\frac{3+\sqrt{82369}}{10}=\frac{3+287}{10}=29$.

667.

Qu'on entende par a un nombre octogone, duquel on veuille trouver la racine x.

On aura $3xx-2x=a$, ou $xx=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}a$,

d'où résulte $x=\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}a}=\frac{1+\sqrt{3a+1}}{3}$. Tous les nombres octogones sont tels, par conséquent, que si on les multiplie par 3 & qu'on ajoute l'unité au produit, la somme est constamment un quarré.

Soit, par exemple, 3816 un octogone; sa racine sera $x=\frac{1+\sqrt{11449}}{3}=\frac{1+107}{3}=36$.

668.

Soit enfin a un nombre n gone donné, dont il s'agisse de déterminer la racine; on aura cette équation:

$\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}=a$, ou $(n-2)xx-(n-4)x=2a$, par conséquent $xx=\frac{(n-4)x}{n-2}+\frac{2a}{n-2}$; on en tire

$$x=\frac{n-4}{2(n-2)}+\sqrt{\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2}+\frac{2a}{n-2}}, \text{ ou}$$

$$x=\frac{n-4}{2(n-2)}+\sqrt{\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2}+\frac{8(n-2)a}{4(n-2)^2}}, \text{ ou}$$

$$x=\frac{n-4+\sqrt{8(n-2)a+(n-4)^2}}{2(n-2)}.$$

Cette formule renferme une regle générale pour trouver toutes les racines polygones possibles de nombres donnés.

Par ex. soit donné le nombre XXIV gone 3009; puisque a est ici $=3009$ & $n=24$, on a $n-2=22$ & $n-4=20$; donc la racine ou $x=\frac{20+\sqrt{529584+400}}{44}=\frac{20+728}{44}=17$.

CHAPITRE VIII.

De l'extraction des Racines quarrées des Binomes.

669.

On nomme en Algebre *un binome* (*), une quantité composée de deux parties qui sont, ou toutes affectées du signe de la racine quarrée, ou dont l'une au moins renferme ce signe.

C'est par cette raison que $3+\sqrt{5}$ est

(*) Quoique dans l'Algebre on nomme en général *binome* une quantité composée de deux termes, M. *Euler* a jugé à propos d'appeller ainsi en particulier les expressions que les Analystes françois désignent par *quantités en partie commensurables, & en partie incommensurables.*

un binome, & pareillement $\sqrt{8}+\sqrt{3}$; & il eſt indifférent que ces deux termes ſoient joints par le ſigne + ou par le ſigne —. C'eſt pourquoi $3-\sqrt{5}$ eſt auſſi bien un binome que $3+\sqrt{5}$.

670.

La principale raiſon pour laquelle ces binomes méritent attention, c'eſt que dans la réſolution des équations du ſecond degré, c'eſt toujours à des quantités de cette forme qu'on parvient, lorſque la réſolution ne peut ſe faire. Par exemple, l'équation $xx = 6x - 4$ donne $x = 3+\sqrt{5}$.

On ſent bien, par conſéquent, que ces formules doivent ſe préſenter fréquemment dans les calculs algébriques; auſſi avons-nous eu ſoin plus haut de faire voir comment on doit les traiter dans les opérations ordinaires de l'Addition, de la Souſtraction, de la Multiplication & de la Diviſion; mais ce n'eſt qu'à préſent que nous ſommes en état de montrer comment on

doit en extraire les racines quarrées, c'eſt-à-dire, autant que cette extraction eſt poſſible; car, quand elle ne l'eſt pas, on ſe contente de donner un nouveau ſigne radical à la quantité. La racine quarrée de $3+\sqrt{2}$ eſt $\sqrt{3+\sqrt{2}}$.

671.

Il faut obſerver d'abord que les quarrés de tels binomes ſont auſſi des binomes pareils, dans leſquels même un des termes eſt toujours rationnel.

Car, qu'on prenne le quarré de $a+\sqrt{b}$, on trouvera $(aa+b)+2a\sqrt{b}$. Si donc il s'agiſſoit réciproquement de prendre la racine de la formule $(aa+b)+2a\sqrt{b}$, on la trouveroit $=a+\sqrt{b}$, & il eſt, ſans contredit, bien plus facile de s'en faire une idée de cette maniere, que ſi on avoit ſimplement mis encore le ſigne $\sqrt{}$ devant cette formule. De même, ſi on prend le quarré de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, on trouve $(a+b)+2\sqrt{ab}$; donc réciproquement la racine quarrée de

$(a+b)+2\sqrt{ab}$ sera $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, laquelle sera pareillement plus facile à saisir, que si on se contentoit de mettre le signe $\sqrt{}$ devant la quantité.

672.

Il s'agit donc principalement de déterminer un caractere qui puisse faire reconnoître dans tous les cas si une telle racine quarrée a lieu ou non. Nous commencerons, dans ce dessein, par une formule facile, en cherchant si on peut assigner, dans le sens que nous avons dit, la racine quarrée du binome $5+2\sqrt{6}$.

Supposons donc que cette racine soit $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; le quarré en est $(x+y)+2\sqrt{xy}$, & il doit être égal à la formule $5+2\sqrt{6}$. Par conséquent la partie rationnelle $x+y$ doit être égale à 5, & la partie irrationnelle $2\sqrt{xy}$ doit être égale à $2\sqrt{6}$. Cette derniere égalité donne $\sqrt{xy}=\sqrt{6}$, & $xy=6$. Or puisque $x+y=5$, on a $y=5-x$, & cette valeur substituée dans l'équation

tion $xy=6$, produira $5x-xx=6$, ou $xx=5x-6$. Donc $x=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{24}{4}}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$. Ainsi $x=3$ & $y=2$, d'où nous concluons que la racine quarrée de $5+2\sqrt{6}$ est $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

673.

Comme nous avons trouvé ici les deux équations, I.) $x+y=5$, & II.) $xy=6$, nous allons indiquer une voie particuliere pour en tirer les valeurs de x & de y.

Puisque $x+y=5$, qu'on prenne les quarrés $xx+2xy+yy=25$; faisant attention maintenant que $xx-2xy+yy$ est le quarré de $x-y$, qu'on soustraie de $xx+2xy+yy=25$ l'équation $xy=6$ prise quatre fois, ou $4xy=24$, afin d'avoir $xx-2xy+yy=1$; car prenant à présent les racines, on a $x-y=1$; & $x+y$ étant $=5$, on trouvera aisément $x=3$ & $y=2$. Donc la racine quarrée de $5+2\sqrt{6}$ est $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

674.

Considérons le binome général $a+\sqrt{b}$, & supposons sa racine quarrée $=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, nous aurons l'équation $(x+y)+2\sqrt{xy}=a+\sqrt{b}$; ainsi $x+y=a$, & $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$, ou $4xy=b$; soustrayant ce quarré du quarré de l'équation $x+y=a$, ou de $xx+2xy+yy=aa$, il reste $xx-2xy+yy=aa-b$, dont la racine quarrée est $x-y=\sqrt{aa-b}$. Or $x+y=a$; nous avons donc $x=\frac{a+\sqrt{aa-b}}{2}$ & $y=\frac{a-\sqrt{aa-b}}{2}$, & par conséquent la racine quarrée cherchée de $a+\sqrt{b}$ est $\sqrt{\frac{a+\sqrt{aa-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{aa-b}}{2}}$.

675.

Nous conviendrons que cette formule est plus compliquée que si on eût mis simplement le signe radical $\sqrt{}$ devant le binome donné $a+\sqrt{b}$, & qu'on eût écrit $\sqrt{a+\sqrt{b}}$. Mais considérons que ladite formule peut se simplifier beaucoup, lorsque

les nombres a & b sont tels que $aa-b$ devient un quarré, puisqu'alors le signe $\sqrt{}$ qui est sous le signe $\sqrt{}$ se trouve éliminé. Nous voyons en même temps qu'on ne peut extraire commodément la racine quarrée du binome $a+\sqrt{b}$, que lorsque $aa-b=cc$; car dans ce cas la racine quarrée cherchée est $\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$; & que si $aa-b$ n'est pas un quarré parfait, on ne peut indiquer plus convenablement la racine quarrée de $a+\sqrt{b}$, qu'en mettant le signe radical $\sqrt{}$ devant cette quantité.

676.

La condition donc qui est requise pour qu'on puisse exprimer d'une façon plus commode la racine quarrée d'un binome $a+\sqrt{b}$, c'est que $aa-b$ soit un quarré; & si on indique ce quarré par cc, on aura pour la racine quarrée en question $\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$. Il faut remarquer de plus que la racine quarrée de $a-\sqrt{b}$ sera $\sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}}$;

car, en prenant le quarré de cette formule, on trouve $a - 2\sqrt{\frac{aa-cc}{4}}$; or puisque $cc = aa - b$, & par conséquent $aa - cc = b$, le même quarré se trouve $= a - 2\sqrt{\frac{b}{4}} = a - \frac{2\sqrt{b}}{2} = a - \sqrt{b}$.

677.

Lors donc qu'il s'agit d'extraire la racine quarrée d'un binome tel que $a \pm \sqrt{b}$, la regle est de soustraire du quarré aa de la partie rationnelle le quarré b de la partie irrationnelle, de prendre la racine quarrée du reste, & en nommant cette racine c, d'écrire pour la racine cherchée $\sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

678.

Qu'on cherche la racine quarrée de $2 + \sqrt{3}$, on a $a = 2$ & $b = 3$; donc $aa - b = cc = 1$, & $c = 1$; ainsi la racine cherchée $= \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Qu'il s'agisse de trouver la racine quarrée du binome $11 + 6\sqrt{2}$, on aura $a = 11$, & $\sqrt{b} = 6\sqrt{2}$; par conséquent $b = 36.2 = 72$, & $aa - b = 49$; ce qui donne $c = 7$; & il résulte de-là que la racine quarrée de $11 + 6\sqrt{2}$ est $\sqrt{9} + \sqrt{2}$, ou $3 + \sqrt{2}$.

Qu'on cherche la racine quarrée de $11 + 2\sqrt{30}$: ici $a = 11$ & $\sqrt{b} = 2\sqrt{30}$; par conséquent $b = 4.30 = 120$, & $aa - b = 1$, & $c = 1$; donc la racine cherchée $= \sqrt{6} + \sqrt{5}$.

679.

Cette regle a lieu également, lors même que le binome renferme des quantités imaginaires ou impossibles.

Soit proposé, par exemple, le binome $1 + 4\sqrt{-3}$, on aura $a = 1$ & $\sqrt{b} = 4\sqrt{-3}$, c'est-à-dire, $b = -48$ & $aa - b = 49$. Donc $c = 7$, & par conséquent la racine quarrée qu'on cherche $= \sqrt{4} + \sqrt{-3} = 2 + \sqrt{-3}$.

Autre exemple. Soit donné $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, nous avons $a = -\frac{1}{2}$; $\sqrt{b} = \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, & $b = \frac{1}{4}.-3 = -\frac{3}{4}$. Donc $aa - b = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

$=1$, & $c=1$; & le résultat cherché est $\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}$, ou $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Un autre exemple remarquable est celui où il s'agit de trouver la racine quarrée de $2\sqrt{-1}$. Comme il n'y a point ici de partie rationnelle, on aura $a=0$; or $\sqrt{b}=2\sqrt{-1}$ & $b=-4$, donc $aa-b=4$ & $c=2$; par conséquent la racine quarrée qu'on cherche est $\sqrt{1}+\sqrt{-1}=1+\sqrt{-1}$, & en effet le quarré de cette quantité est $1+2\sqrt{-1}-1=2\sqrt{-1}$.

680.

Supposons encore qu'il se présentât une équation telle que $xx=a\pm\sqrt{b}$, & que $aa-b$ fût $=cc$; on en concluroit la valeur de $x=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$, ce qui peut être d'usage en bien des cas.

Soit, par exemple, $xx=17+12\sqrt{2}$, on aura $x=3+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}$.

681.

Ce cas a lieu principalement dans la résolution de quelques équations du quatrieme

degré, par exemple, de $x^4=2axx+d$. Car si l'on suppose $xx=y$, on a $x^4=yy$, ce qui réduit l'équation donnée à $yy=2ay+d$, & d'où l'on tire $y=a\pm\sqrt{aa+d}$. On a donc $xx=a\pm\sqrt{aa+d}$, & par conséquent encore une extraction de racine à faire. Or, puisqu'ici $\sqrt{b}=\sqrt{aa+d}$, on aura $b=aa+d$, & $aa-b=-d$. Si donc $-d$ est un quarré comme cc, c'est-à-dire que $d=-cc$, on pourra assigner la racine demandée.

Supposons qu'effectivement $d=-cc$, ou bien que l'équation du quatrieme degré proposée soit $x^4=2axx-cc$, nous trouverons donc $x=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

682.

Nous rendrons plus sensible, par quelques exemples, ce que nous venons de dire.

1°. On cherche deux nombres dont le produit soit 105, & dont les quarrés fassent ensemble 274.

Indiquons ces deux nombres par x & y; nous aurons les deux équations, I.) $xy = 105$, & II.) $xx + yy = 274$.

La premiere donne $y = \frac{105}{x}$, & cette valeur de y étant substituée dans la seconde équation, nous avons $xx + \frac{105^2}{xx} = 274$.

Donc $x^4 + 105^2 = 274xx$, ou $x^4 = 274xx - 105^2$.

Si nous comparons maintenant cette équation avec celle de l'article précédent, nous avons $2a = 274$, & $-cc = -105^2$; par conséquent $c = 105$, & $a = 137$. Nous trouvons par conséquent

$$x = \sqrt{\frac{137+105}{2}} \pm \sqrt{\frac{137-105}{2}} = 11 \pm 4.$$

Il s'ensuit de-là que x est, ou $= 15$, ou $= 7$. Dans le premier cas $y = 7$, dans le second cas $y = 15$. Donc les deux nombres cherchés sont 15 & 7.

683.

Il sera bon cependant de remarquer que ce calcul peut se faire beaucoup plus facilement d'une autre maniere. Car puisque

$xx + 2xy + yy$ & $xx - 2xy + yy$ sont des quarrés, & que nous connoissons les valeurs de $xx + yy$ & de xy, nous n'avons qu'à prendre le double de cette derniere quantité, l'ajouter à la premiere & l'en soustraire, comme on va voir: $xx + yy = 274$. Si on y ajoute $2xy = 210$, on a $xx + 2xy + yy = 484$, ce qui donne $x + y = 22$.

Soustrayant à présent $2xy$, il reste $xx - 2xy + yy = 64$, d'où l'on tire $x - y = 8$.

Ainsi $2x = 30$ & $2y = 14$, & par conséquent $x = 15$ & $y = 7$.

La question générale qui suit, se résout par la même méthode.

2°. On cherche deux nombres, dont le produit soit $= m$, & la somme des quarrés $= n$.

Si ces nombres sont, l'un $= x$, l'autre $= y$, on a les deux équations suivantes: I.) $xy = m$, II.) $xx + yy = n$. Or $2xy = 2m$ étant ajouté à $xx + yy = n$, on a $xx + 2xy + yy = n + 2m$, & par conséquent $x + y = \sqrt{n + 2m}$.

Mais soustrayant $2xy$, il reste $xx-2xy+yy=n-2m$, d'où l'on tire $x-y=\sqrt{n-2m}$; on aura donc $x=\frac{1}{2}\sqrt{n+2m}+\frac{1}{2}\sqrt{n-2m}$, & $y=\frac{1}{2}\sqrt{n+2m}-\frac{1}{2}\sqrt{n-2m}$.

684.

3°. On cherche deux nombres tels que leur produit $=35$, & la différence de leurs quarrés $=24$.

Soit le plus grand des deux nombres $=x$ & le plus petit $=y$, on aura les deux équations $xy=35$, & $xx-yy=24$; & les mêmes avantages n'ayant pas lieu ici, on procédera par la voie ordinaire. La premiere équation donne $y=\frac{35}{x}$, &, en substituant cette valeur de y dans la seconde, on a $xx-\frac{1225}{xx}=24$. Multipliant par xx, on a $x^4-1225=24xx$, & $x^4=24xx+1225$. Or le second membre de cette équation étant affecté du signe $+$, on ne pourra pas faire usage de la formule donnée ci-dessus, parce que cc étant $=-1225$, c deviendroit imaginaire.

Qu'on fasse donc $xx=z$, on aura $zz=24z+1225$, d'où l'on tire $z=12\pm\sqrt{144+1225}$, ou $z=12\pm37$; par conséquent $xx=12\pm37$, c'est-à-d. ou $=49$ ou $=-25$.

Si on adopte la premiere valeur, on a $x=7$ & $y=5$.

Si on adopte la seconde valeur, on a $x=\sqrt{-25}$ & $y=\frac{35}{\sqrt{-25}}=\sqrt{\frac{1225}{-25}}=\sqrt{-49}$.

685.

Nous terminerons ce Chapitre par la question suivante.

4°. On cherche deux nombres tels qu'il y ait égalité entre leur somme, leur produit & la différence de leurs quarrés.

Soit x le plus grand des deux nombres, & y le plus petit; il faudra que les trois formules qui suivent soient égales entre elles: I.) la somme $x+y$; II.) le produit xy; III.) la différence des quarrés $xx-yy$. Si l'on compare la premiere avec la se-

conde, on a $x+y=xy$, ce qui donnera une valeur de x; car on aura $y=xy-x$ $=x(y-1)$, & $x=\frac{y}{y-1}$. Par conſéquent $x+y=\frac{yy}{y-1}$, & $xy=\frac{yy}{y-1}$, c'eſt-à-dire que la ſomme eſt en effet égale au produit; & c'eſt à quoi doit être égale auſſi la différence des quarrés. Or on a $xx-yy$ $=\frac{yy}{yy-2y+1}-yy=\frac{-y^4+2y^3}{yy-2y+1}$; faiſant donc ceci égal à la quantité trouvée $\frac{yy}{y-1}$, on a $\frac{yy}{y-1}$ $=\frac{-y^4+2y^3}{yy-2y+1}$; diviſant par yy, il vient $\frac{1}{y-1}$ $=\frac{-yy+2y}{yy-2y+1}$; multipliant par $(y-1)^2$, on a $y-1=-yy+2y$; par conſéquent $yy=y$ $+1$. Cela donne $y=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{1}{2}$ $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ ou $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, & on aura donc x $=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$.

Pour chaſſer la quantité ſourde du dénominateur, on multipliera les deux termes par $\sqrt{5}+1$, & on obtiendra $x=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}$ $=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Réponſe. Le plus grand des nombres cherchés, ou x, $=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; & le plus petit, y, $=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ainſi leur ſomme $x+y=2$ $+\sqrt{5}$; leur produit $xy=2+\sqrt{5}$; & puiſque $xx=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$, & $yy=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, on a auſſi la différence des quarrés $xx-yy=2$ $+\sqrt{5}$.

686.

Comme cette ſolution étoit aſſez longue, il ſera bon de faire remarquer qu'on peut l'abréger. Qu'on commence par faire la ſomme $x+y$ égale à la différence des quarrés $xx-yy$, on aura $x+y=xx-yy$; & diviſant par $x+y$, à cauſe de $xx-yy$ $=(x+y)(x-y)$, on trouve $1=x-y$ & $x=y+1$. Par conſéquent $x+y=2y$ $+1$, & $xx-yy=2y+1$; de plus le produit xy ou $yy+y$ devant être égal à la même quantité, on a $yy+y=2y+1$, ou $yy=y+1$, ce qui donne, comme ci-deſſus, $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

687.

5°. La queſtion précédente nous conduit à conſidérer encore celle-ci: Trouver deux

nombres tels, qu'il y ait égalité entre leur somme, leur produit & la somme de leurs quarrés.

Nommons x & y les nombres cherchés; il faut qu'il y ait égalité entre I.) $x+y$, II.) xy, & III.) $xx+yy$.

Comparant la premiere & la seconde formule, nous avons $x+y=xy$, d'où nous tirons $x=\frac{y}{y-1}$; par conséquent xy ou $x+y=\frac{yy}{y-1}$. Or la même quantité équivaut à $xx+yy$, ainsi nous avons $\frac{yy}{yy-2y+1}+yy=\frac{yy}{y-1}$. Multipliant par $yy-2y+1$, le produit est $y^4-2y^3+2yy=y^3-yy$, ou $y^4=3y^3-3yy$; & en divisant par yy, nous avons $yy=3y-3$; ce qui donne $y=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-3}=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$; par conséquent $y-1=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, d'où résulte $x=\frac{3+\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$; & en multipliant les deux termes par $1-\sqrt{-3}$, le résultat est $x=\frac{6-2\sqrt{-3}}{4}$ ou $\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$.

Réponse. Donc les deux nombres cherchés sont $x=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$, & $y=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$, leur somme est $x+y=3$, leur produit $xy=3$;

enfin, puisque $xx=\frac{3-3\sqrt{-3}}{3}$ & $yy=\frac{3+3\sqrt{-3}}{2}$, la somme des quarrés $xx+yy=3$.

688.

On peut abréger considérablement ce calcul par un artifice particulier, qui est applicable aussi dans d'autres cas. Il consiste à exprimer les nombres cherchés par la somme & par la différence de deux lettres, au lieu de les indiquer par des lettres simples.

Qu'on suppose, dans notre derniere question, l'un des nombres cherchés $=p+q$, & l'autre $=p-q$, leur somme sera $2p$, leur produit sera $pp-qq$, & la somme de leurs quarrés sera $=2pp+2qq$, & ces trois quantités doivent être égales entr'elles. Egalant d'abord la premiere à la seconde, on a $2p=pp-qq$, ce qui donne $qq=pp-2p$. Substituant cette valeur de qq dans la troisieme quantité, & comparant le résultat $4pp-4p$ avec la premiere, on a $2p=4pp-4p$, d'où l'on tire $p=\frac{3}{2}$.

Par conséquent $qq=-\frac{3}{4}$, & $q=\frac{\sqrt{-3}}{2}$; de sorte que les nombres que nous cherchons sont $p+q=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$, & $p-q=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$, comme nous les avons trouvés ci-dessus.

CHAPITRE IX.

De la nature des Equations du second degré.

689.

On a vu suffisamment par ce qui précede, que les équations du second degré sont résolubles de deux manieres, & cette propriété mérite à tous égards d'être examinée, parce que la nature des équations d'un degré supérieur ne peut que recevoir par-là beaucoup de jour. Nous remonterons donc avec plus d'attention aux causes qui font que toute équation du second degré admet une double solution; elles renferment indubitablement une propriété essentielle de ces équations.

690.

690.

Il est vrai que nous avons déjà vu que cette double solution provient de ce que la racine quarrée d'un nombre quelconque peut être prise, soit positive, soit négative; cependant, comme ce principe ne s'appliqueroit pas aisément à des équations de dimensions plus hautes, il sera bon de développer clairement la même propriété encore d'une autre maniere. Nous prendrons pour exemple l'équation du second degré, $xx=12x-35$, & nous donnerons une nouvelle raison, par laquelle cette équation est résoluble de deux façons; en admettant pour x les deux valeurs 5 & 7 qui lui satisfont également.

691.

Il est plus convenable pour notre but, de commencer par transposer les termes de l'équation, de maniere qu'un des membres devienne 0; cette équation prend par

conséquent la forme $xx - 12x + 35 = 0$; & il s'agit à présent de trouver un nombre tel que, si on le substitue à x, la formule $xx - 12x + 35$ se réduise effectivement à rien; il sera question après cela de montrer pourquoi cela peut se faire de deux manieres.

692.

Or le tout consiste ici à faire voir avec clarté, qu'une quantité de la forme $xx - 12x + 35$ peut être envisagée comme le produit de deux facteurs; ainsi en effet la formule dont nous parlons est composée des deux facteurs $(x-5).(x-7)$. Car puisque cette quantité doit se réduire à o, il faut aussi que le produit $(x-5).(x-7) = 0$; mais un produit, de quelque nombre de facteurs qu'il soit composé, devient $=0$, lors même qu'un seul de ces facteurs se réduit à o; c'est un principe fondamental auquel il faut faire attention, sur-tout quand il s'agit d'équations de plusieurs degrés.

693.

On comprend donc aisément, que le produit $(x-5).(x-7)$ peut devenir o de deux façons: l'une, quand le premier facteur $x - 5 = 0$; l'autre, quand le second facteur $x - 7 = 0$. Dans le premier cas $x = 5$, dans l'autre cas $x = 7$. La raison est donc très-claire, pourquoi une telle équation $xx - 12x + 35 = 0$, admet deux solutions; c'est-à-dire, pourquoi on peut assigner pour x deux valeurs qui satisfont également à l'équation. Cette raison fondamentale consiste en ce que la formule $xx - 12x + 35$ peut être représentée par le produit de deux facteurs.

694.

Les mêmes circonstances se retrouvent dans toutes les équations du second degré. Car, après avoir porté tous les termes d'un même côté, on ne manque jamais de parvenir à une équation de la forme $xx - ax$

$+b=0$, & cette formule peut toujours être regardée pareillement comme le produit de deux facteurs, que nous représenterons par $(x-p)x-q$, sans nous embarrasser quels nombres sont les valeurs de p & de q. Or ce produit devant être $=0$ par la nature de notre équation, il est clair que cela peut arriver de deux manieres: en premier lieu, lorsque $x=p$; & en second lieu, lorsque $x=q$; & ce sont-là les deux valeurs de x qui satisfont à l'équation.

695.

Voyons maintenant de quelle nature doivent être ces deux facteurs, pour que la multiplication de l'un par l'autre reproduise exactement notre formule $xx-ax+b$. Nous trouvons, en les multipliant réellement, $xx-(p+q)x+pq$; or cette quantité doit être la même chose que $xx-ax+b$, il faut donc évidemment que $p+q=a$, & $pq=b$. Ainsi nous apprenons cette propriété bien remarquable, que dans

toute équation de la forme $xx-ax+b=0$, les deux valeurs de x sont telles que leur somme est égale à a, & leur produit égal à b; d'où il suit que, dès qu'on connoît l'une des valeurs, on trouve aussi l'autre facilement.

696.

Nous venons de considérer le cas où les deux valeurs de x sont positives, & qui exige que le second terme de l'équation ait le signe $-$, & que le troisieme terme ait le signe $+$. Considérons donc aussi les cas dans lesquels soit l'une ou toutes les deux valeurs de x deviennent négatives. Le premier de ces cas a lieu, lorsque les deux facteurs de l'équation donnent un produit de cette forme $(x-p)(x+q)$; car alors les deux valeurs de x sont $x=p$ & $x=-q$; l'équation elle-même devient $xx+(q-p)x-pq=0$; le second terme a le signe $+$, quand q est plus grand que p, & le signe $-$, quand q est plus petit que p; enfin le troisieme terme est toujours négatif.

Le second cas, où les deux valeurs de x sont négatives, a lieu, lorsque les deux facteurs sont $(x+p)(x+q)$; car on a $x=-p$ & $x=-q$; l'équation elle-même devient $xx+(p+q)x+pq=0$, où le second comme le troisieme terme sont affectés du signe $+$.

697.

Les signes du second & du troisieme terme nous font connoître par conséquent la qualité des racines d'une équation quelconque du second degré. Soit l'équation $xx \ldots ax \ldots b=0$: si le second & le troisieme terme ont le signe $+$, les deux valeurs de x sont négatives; si le second terme a le signe $-$, & que le troisieme terme ait $+$, les deux valeurs sont positives; enfin, si le troisieme terme affecte de même le signe $-$, une des valeurs en question est positive. Mais dans tous les cas au reste le second terme contient la somme des deux valeurs, & le troisieme terme contient leur produit.

698.

On trouvera très-facile, après ce qui a été dit, de former des équations du second degré qui renferment deux valeurs données à volonté. On demande, par exemple, une équation telle que l'une des valeurs de x soit 7, & que l'autre soit -3. Qu'on forme d'abord les équations simples $x=7$ & $x=-3$; ensuite de-là celles-ci, $x-7=0$ & $x+3=0$, on aura de cette maniere les facteurs de l'équation cherchée, laquelle devient par conséquent $xx-4x-21=0$. Aussi en appliquant ici la regle donnée plus haut, trouve-t-on les deux valeurs de x supposées; car si $xx=4x+21$, on a $x=2\pm\sqrt{25}=2\pm5$, c'est-à-dire $x=7$, ou $x=-3$.

699.

Il peut arriver aussi que les valeurs de x deviennent égales: qu'on cherche, par exemple, une équation où ces deux valeurs soient $=5$, les deux facteurs seront $(x-5)$

$(x-5)$, & l'équation cherchée ſera $xx-10x+25=0$. Dans cette équation x paroît n'avoir qu'une valeur ; mais c'eſt que x ſe trouve doublement $=5$, comme la ſolution ordinaire le fait voir pareillement ; car on a $xx=10x-25$; donc $x=5\pm\sqrt{0}=5\pm0$, c'eſt-à-dire que x eſt de deux façons $=5$.

700.

Un cas remarquable ſur-tout, & qui arrive quelquefois, c'eſt celui où les deux valeurs de x deviennent imaginaires ou impoſſibles ; car il eſt tout-à-fait impoſſible alors d'aſſigner pour x une valeur telle qu'elle ſatisfaſſe à l'équation. Qu'on ſe propoſe, par exemple, de partager le nombre 10 en deux parties, telles que leur produit ſoit 30 ; ſi on nomme x une de ces parties, l'autre ſera $=10-x$, & leur produit ſera $10x-xx=30$; donc $xx=10x-30$, & $x=5\pm\sqrt{-5}$, ce qui eſt un nombre imaginaire qui apprend que la queſtion eſt impoſſible.

701.

Il eſt donc très-important de trouver un ſigne auquel on puiſſe reconnoître ſur le champ ſi une équation du ſecond degré eſt poſſible, ou ſi elle ne l'eſt pas.

Reprenons l'équation générale $xx-ax+b=0$, nous aurons $xx=ax-b$, & $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa-b}$. On voit par-là que ſi b eſt plus grand que $\frac{1}{4}aa$, ou $4b$ plus grand que aa, les deux valeurs de x deviennent toujours imaginaires, vu qu'il s'agiroit d'extraire la racine quarrée d'une quantité négative ; & au contraire, que ſi b eſt plus petit que $\frac{1}{4}aa$, ou même plus petit que 0, c'eſt-à-dire que ce ſoit un nombre négatif, les deux valeurs ſeront poſſibles ou réelles. Au reſte, qu'elles ſoient réelles ou qu'elles ſoient imaginaires, il n'en eſt pas moins vrai qu'on pourra toujours les exprimer, & qu'elles ont auſſi toujours la propriété que leur ſomme eſt $=a$, & leur produit $=b$. Dans l'équation $xx-6x+10=0$;

par exemple, la ſomme des deux valeurs de x doit être $=6$, & le produit de ces deux valeurs doit être $=10$; or on trouve, I.) $x=3+\sqrt{-1}$, & II.) $x=3-\sqrt{-1}$, quantités dont la ſomme $=6$, & le produit $=10$.

702.

Le caractere que nous venons de trouver peut s'exprimer d'une maniere encore plus générale, & de façon à pouvoir même être appliqué aux équations de cette forme, $fxx \pm gx + h = 0$; car cette équation donne $xx = \mp\frac{gx}{f} - \frac{h}{f}$, & $x = \mp\frac{g}{2f} \pm \sqrt{\frac{gg}{4ff} - \frac{h}{f}}$, ou $x = \frac{\mp g \pm \sqrt{gg - 4hf}}{2f}$; d'où l'on infere que les deux valeurs ſont imaginaires, & par conſéquent l'équation impoſſible, quand $4fh$ eſt plus grand que gg; c'eſt-à-dire, lorſque dans l'équation $fxx - gx + h = 0$, le quadruple du produit du premier & du dernier terme ſurpaſſe le quarré du ſecond terme; car ce produit du premier & du dernier terme, pris quatre fois, eſt $4fhxx$, & le

quarré du terme moyen eſt $ggxx$; or ſi $4fhxx$ eſt plus grand que $ggxx$, $4fh$ eſt auſſi plus grand que gg, & dans ce cas l'équation eſt évidemment impoſſible. Dans tous les autres cas l'équation eſt poſſible, & on peut aſſigner deux valeurs réelles pour x; il eſt vrai que ſouvent elles deviennent irrationnelles; mais nous avons vu plus haut que dans ces cas on ne laiſſe pas de pouvoir les connoître en approchant autant qu'on veut; au lieu qu'aucune approximation ne ſauroit avoir lieu pour les expreſſions imaginaires, telles que $\sqrt{-5}$; car 100 eſt auſſi éloigné d'être la valeur de cette racine, que l'eſt 1 ou un autre nombre quelconque.

703.

Nous avons encore à faire remarquer qu'une formule quelconque du ſecond degré, $xx \pm ax \pm b$, eſt toujours néceſſairement réſoluble en deux facteurs, tels que $(x \pm p)(x \pm q)$. Car ſi l'on prenoit trois

facteurs pareils à ceux-là, on parviendroit à une quantité du troisieme degré, & en ne prenant qu'un seul facteur pareil, on ne passeroit pas le premier degré.

C'est donc un point qui est au-dessus de toute contestation, que toute équation du second degré renferme nécessairement deux valeurs de x, & qu'il ne peut y en avoir moins ou davantage.

704.

Nous avons déjà vu que quand on a trouvé les deux facteurs, on connoît aussi les deux valeurs de x, vu que chaque facteur donne une de ces valeurs, quand on le suppose $=0$. L'inverse a lieu pareillement, c'est-à-dire que dès qu'on a trouvé une valeur de x, on connoît aussi un des facteurs de l'équation; car si $x=p$ indique une des valeurs de x dans une équation quelconque du second degré, $x-p$ est un des facteurs de cette équation; c'est-à-dire que tous les termes ayant été portés du

même côté, l'équation est divisible par $x-p$, & qui plus est, le quotient exprime l'autre facteur.

705.

Soit donnée, pour éclaircir mieux ce que nous venons de dire, l'équation $xx+4x-21=0$, de laquelle nous savons que $x=3$ est une des valeurs de x, parce que $3.3+4.3-21=0$; cela nous fait juger que $x-3$ est un des facteurs de cette équation, ou que $xx+4x-21$ est divisible par $x-3$, & en effet la division suivante le fait voir.

$$
\begin{array}{r|l}
x-3) & xx+4x-21\,(x+7 \\
 & \underline{xx-3x} \\
 & 7x-21 \\
 & \underline{7x-21} \\
 & 0.
\end{array}
$$

Ainsi l'autre facteur est $x+7$, & notre équation se représente par le produit $(x-3)(x+7)=0$; d'où s'ensuivent immédiatement les deux valeurs de x, le premier facteur donnant $x=3$, & l'autre facteur donnant $x=-7$.

CHAPITRE X.

Des Equations pures du troisieme degré.

706.

On dit d'une équation du troisieme degré, qu'elle est *pure*, lorsque le cube de la quantité inconnue est égal à une quantité connue, sans que ni le quarré de l'inconnue ni l'inconnue même se trouvent dans l'équation.

$x^3 = 125$, ou plus généralement $x^3 = a$, $x^3 = \frac{a}{b}$, sont des équations de ce genre.

707.

Il est clair comment on doit tirer la valeur de x d'une telle équation, vu qu'on n'a besoin que d'extraire des deux côtés la racine cubique. L'équation $x^3 = 125$ donne $x = 5$, l'équation $x^3 = a$ donne $x = \sqrt[3]{a}$, & l'équation $x^3 = \frac{a}{b}$ donne $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, ou x

$= \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$. Il suffit donc qu'on ait appris à extraire la racine cubique d'un nombre proposé, pour qu'on soit en état de résoudre de semblables équations.

708.

On n'obtient de cette matiere qu'une seule valeur pour x; cependant toute équation du second degré ayant deux valeurs, on est fondé à soupçonner qu'une équation du troisieme degré a pareillement plus d'une valeur; il vaudra donc la peine d'approfondir la chose, & en cas qu'on trouve qu'une telle équation doit avoir plusieurs valeurs pour x, de déterminer ces valeurs.

709.

Considérons, par exemple, l'équation $x^3 = 8$, dans la vue d'en conclure tous les nombres dont le cube est 8. Comme $x = 2$ est sans contredit un tel nombre, il faut, d'après le Chapitre précédent, que la formule $x^3 - 8 = 0$, soit nécessairement

divisible par $x-2$. Faisons donc cette division :

$$\begin{array}{l} x-2)\, x^3 - 8 \quad (xx+2x+4 \\ \quad\; x^3 - 2xx \\ \hline \quad\quad 2xx - 8 \\ \quad\quad 2xx - 4x \\ \hline \quad\quad\quad 4x - 8 \\ \quad\quad\quad 4x - 8 \\ \hline \quad\quad\quad\quad 0. \end{array}$$

Il s'ensuit que notre équation $x^3 - 8 = 0$ peut se représenter par ces facteurs-ci :

$$(x-2)(xx+2x+4)=0.$$

710.

Or la question est de savoir quel nombre on doit substituer à la place de x, pour que $x^3 = 8$, ou que $x^3 - 8 = 0$; & il est clair qu'on satisfait à cette condition, en supposant $=0$ le produit que nous venons de trouver ; mais cela arrive non-seulement quand le premier facteur $x-2=0$, d'où résulte $x=2$, mais aussi quand le second facteur

xx

$xx+2x+4=0$. Qu'on fasse donc $xx+2x+4=0$, on aura $xx=-2x-4$, & de-là $x=-1\pm\sqrt{-3}$.

711.

Outre le cas donc où $x=2$, qui satisfait à l'équation $x^3=8$, nous avons encore pour x deux autres valeurs dont les cubes sont pareillement 8, & qui sont :

I.) $x=-1+\sqrt{-3}$, & II.) $x=-1-\sqrt{-3}$.

On n'en doutera plus, si on prend les cubes effectivement comme nous allons faire :

$$\begin{array}{ll} -1+\sqrt{-3} & -1-\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} & -1-\sqrt{-3} \\ \hline 1-\sqrt{-3} & 1+\sqrt{-3} \\ \quad -\sqrt{-3}-3 & \quad +\sqrt{-3}-3 \\ \hline -2-2\sqrt{-3} \text{ quarré} & -2+2\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} & -1-\sqrt{-3} \\ \hline 2+2\sqrt{-3} & 2-2\sqrt{-3} \\ \quad -2\sqrt{-3}+6 & \quad +2\sqrt{-3}+6 \\ \hline \quad 8 \quad \text{cube.} & \quad 8. \end{array}$$

Il eſt vrai que ces deux valeurs ſont imaginaires ou impoſſibles ; mais elles méritent cependant qu'on y faſſe attention.

712.

Ce que nous venons de voir a lieu en général pour toute équation cubique, telle que $x^3 = a$; on trouvera toujours outre la valeur $x = \sqrt[3]{a}$, encore deux autres valeurs. Qu'on ſuppoſe, pour abréger, $\sqrt[3]{a} = c$, de ſorte que $a = c^3$, notre équation prendra cette forme, $x^3 - c^3 = 0$, qui ſera diviſible par $x - c$, comme la diviſion effective le fait voir :

$$\begin{array}{l} x - c)\, x^3 - c^3\, (xx + cx + cc \\ \quad\;\; \underline{x^3 - cxx} \\ \qquad\quad cxx - c^3 \\ \qquad\quad \underline{cxx - ccx} \\ \qquad\qquad\quad ccx - c^3 \\ \qquad\qquad\quad \underline{ccx - c^3} \\ \qquad\qquad\qquad 0. \end{array}$$

Par conſéquent l'équation en queſtion peut être repréſentée par le produit $(x - c)(xx + cx + cc) = 0$, qui eſt en effet $= 0$, non-ſeulement lorſque $x - c = 0$, ou $x = c$, mais auſſi quand $xx + cx + cc = 0$. Or cette formule contient deux autres valeurs de x; car elle donne $xx = -cx - cc$, & $x = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{cc}{4} - cc}$, ou $x = \frac{-c \pm \sqrt{-3cc}}{2}$, c'eſt-à-dire, $x = \frac{-c \pm c\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \cdot c$.

713.

Or comme c avoit été mis à la place de $\sqrt[3]{a}$, nous en inférons que toute équation du troiſieme degré, de la forme $x^3 = a$, fournit trois valeurs pour x exprimées de la maniere ſuivante :

$$\text{I.)}\ x = \sqrt[3]{a},\quad \text{II.)}\ x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{a},$$

$$\text{III.)}\ x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{a}.$$

On voit par-là que chaque racine cubique a trois différentes valeurs ; mais qu'une ſeule eſt réelle ou poſſible, les deux autres

étant impossibles. Cela est d'autant plus à remarquer, que toute racine quarrée a deux valeurs, & que nous verrons plus bas qu'une racine bi-quarrée a quatre valeurs différentes, qu'une racine cinquieme a cinq valeurs, & ainsi de suite.

Il est vrai que dans les calculs ordinaires on n'emploie que la premiere de ces trois valeurs, parce que les deux autres sont imaginaires; c'est ce que nous confirmerons par quelques exemples.

714.

Premiere question. Trouver un nombre tel que son quarré multiplié par son quart produise 432.

Que x soit ce nombre, il faut que le produit de xx multiplié par $\frac{1}{4}x$ soit égal au nombre 432, c'est-à-dire que $\frac{1}{4}x^3 = 432$, & que $x^3 = 1728$. Qu'on extraie la racine cubique, on aura $x = 12$.

Réponse. Le nombre cherché est 12; car son quarré 144, multiplié par son quart ou par 3, donne 432.

715.

Seconde question. Je cherche un nombre tel, qu'en divisant sa quatrieme puissance par sa moitié, & en ajoutant $14\frac{1}{4}$ au produit, il me vienne 100.

Je nommerai ce nombre x; sa quatrieme puissance sera x^4; divisant par la moitié $\frac{1}{2}x$, j'ai $2x^3$, & il faut qu'en ajoutant $14\frac{1}{4}$, la somme soit 100; j'ai donc $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$; soustrayant $14\frac{1}{4}$, il reste $2x^3 = \frac{343}{4}$, divisant par 2, j'ai $x^3 = \frac{343}{8}$, & prenant la racine cubique, j'obtiens enfin $x = \frac{7}{2}$.

716.

Troisieme question. Quelques Capitaines se trouvent en campagne; chacun commande à trois fois autant de Cavaliers, & à vingt fois autant de Fantassins qu'ils sont de Capitaines. Un Cavalier reçoit chaque mois pour sa paye autant de florins qu'il y a de Capitaines, & chaque Fantassin reçoit

la moitié de cette paye ; la dépense totale par mois est de 13000 florins ; on demande combien il y a de Capitaines ?

Soit x le nombre cherché, chaque Capitaine aura sous lui $3x$ Cavaliers & $20x$ Fantassins. Ainsi le nombre total des Cavaliers est $3xx$, & celui des Fantassins est $20xx$. Or chaque Cavalier recevant par mois x florins, & chaque Fantassin recevant $\frac{1}{2}x$ flor. la paye des Cavaliers, à chaque mois, se monte à $3x^3$, & celle des Fantassins est $10x^3$; ils reçoivent donc tous ensemble $13x^3$ flor. & cette somme doit équivaloir à 13000 florins ; on a donc $13x^3 = 13000$, ou $x^3 = 1000$, & $x = 10$, nombre cherché des Capitaines.

717.

Quatrieme question. Quelques Négocians entrent en société, & chacun contribue cent fois autant qu'il y a d'Associés ; ils envoient un Facteur à Venise pour faire valoir ce capital ; ce Facteur gagne pour cent sequins deux fois autant de sequins qu'il y a d'Intéressés, & il revient avec 2662 sequins de profit ; on demande le nombre des Associés ?

Si ce nombre est supposé $= x$, chacun des Négocians associés aura fourni $100x$ sequins, & le capital entier aura été de $100xx$ sequins ; or le profit étant de $2x$ pour 100, le capital aura rapporté $2x^3$; ainsi il faut faire $2x^3 = 2662$, ou $x^3 = 1331$; cela donne $x = 11$, & c'est le nombre des Associés.

718.

Cinquieme question. Une Paysanne échange des fromages contre des poules, à raison de deux fromages pour trois poules ; ces poules pondent chacune $\frac{1}{3}$ autant d'œufs qu'il y a de poules ; la Paysanne vend au marché neuf œufs pour autant de sous que chaque poule a pondu d'œufs, & elle tire 72 sous ; on demande combien de fromages elle a échangé ?

Soit ce nombre des fromages $=x$, celui des poules que la Payſanne aura reçues en échange ſera $=\frac{3}{2}x$, & chaque poule pondant $\frac{1}{2}x$ œufs, le nombre des œufs ſera $=\frac{3}{4}xx$. Or neuf œufs ſe vendent pour $\frac{1}{2}x$ ſous, ainſi l'argent que $\frac{3}{4}xx$ œufs produiſent, eſt $\frac{1}{24}x^3$, & il faut que $\frac{1}{24}x^3=72$. Par conſéquent $x^3=24.72=8.3.8.9=8.8.27$, & $x=12$; c'eſt-à-dire que la Payſanne a échangé douze fromages contre dix-huit poules.

CHAPITRE XI.

De la réſolution des Equations complettes du troiſieme degré.

719.

UNE équation du troiſieme degré eſt dite *complette*, lorſqu'elle renferme, outre le cube de l'inconnue, auſſi cette quantité inconnue elle-même, & le quarré de cette

quantité; de ſorte que la formule générale pour toutes ces équations, en portant tous les termes d'un même côté, eſt

$$ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d=0.$$

C'eſt à faire voir comment on doit tirer de telles équations les valeurs de x, qu'on nomme auſſi les *racines* de l'équation, que nous deſtinons ce Chapitre. Nous ſuppoſerons qu'on n'a aucun doute qu'une telle équation n'ait trois racines, après que nous avons fait voir dans le Chapitre précédent que cela eſt vrai à l'égard des équations pures du même degré.

720.

Nous conſidérerons d'abord l'équation $x^3-6xx+11x-6=0$; & de même qu'une équation du ſecond degré peut être regardée comme étant le produit de deux facteurs, on peut repréſenter une équation du troiſieme degré par le produit de trois facteurs qui ſont dans notre cas, $(x-1)(x-2)(x-3)=0$; puiſqu'en les multi-

pliant effectivement on parvient à l'équation donnée ; car $(x-1).(x-2)$ donne $xx-3x+2$, & multipliant ceci par $x-3$ on trouve $x^3-6xx+11x-6$, ce qui est en effet la formule prescrite, & qui doit être $=0$. Or cela a lieu par conséquent, quand le produit $(x-1)(x-2)(x-3)$ se réduit à rien ; & comme il suffit pour cet effet qu'un seul de ces facteurs soit $=0$, trois différens cas peuvent donner ce résultat, savoir $x-1=0$, ou $x=1$; en second lieu, $x-2=0$, ou $x=2$; & en troisieme lieu, $x-3=0$, ou $x=3$.

On voit sur le champ aussi, que si on substituoit à la place de x un nombre quelconque, autre qu'un des trois ci-dessus, aucun des trois facteurs ne deviendroit $=0$, & par conséquent que le produit ne deviendroit pas 0 non plus ; ce qui prouve que notre équation ne peut avoir d'autre racine que ces trois racines-là.

721.

Si l'on pouvoit dans tout autre cas assigner de même les trois facteurs d'une telle équation, on auroit immédiatement ses trois racines. Considérons donc d'une maniere plus générale ces trois facteurs, $x-p$, $x-q$, $x-r$; si nous cherchons leur produit, le premier multiplié par le second donne $xx-(p+q)x+pq$, & ce produit multiplié par $x-r$ fait $x^3-(p+q+r)xx+(pq+pr+qr)x-pqr$.

Or si cette formule doit devenir $=0$, cela peut arriver dans trois cas : le premier est celui où $x-p=0$, ou $x=p$; le second a lieu quand $x-q=0$, ou $x=q$; le troisieme cas est celui de $x-r=0$, ou de $x=r$.

722.

Représentons maintenant la formule trouvée par l'équation $x^3-axx+bx-c=0$; il est clair que pour que ses trois racines soient

I.) $x=p$, II.) $x=q$, III.) $x=r$, il faut 1°. que $a=p+q+r$, 2°. que $b=pq+pr+qr$, & 3°. que $c=pqr$. Ainſi nous apprenons par-là que le ſecond terme contient la ſomme des trois racines, que le troiſieme terme contient la ſomme des produits des racines priſes deux à deux, enfin que le quatrieme terme eſt formé du produit de toutes les trois racines multipliées les unes par les autres.

Cette derniere propriété nous préſente auſſi-tôt une vérité importante, qui eſt qu'une équation du troiſieme degré ne peut certainement avoir d'autres racines rationnelles que des diviſeurs du dernier terme; car puiſque ce terme eſt le produit des trois racines, il faut qu'il ſoit diviſible par chacune d'elles. On voit donc ſur le champ, lorſqu'on veut chercher une racine par le tâtonnement, de quels nombres on doit faire l'eſſai (*).

Si nous conſidérons, pour nous expliquer mieux, l'équation $x^3=x+6$, ou $x^3-x-6=0$, comme cette équation ne peut avoir d'autres racines rationnelles que des nombres qui ſont facteurs du dernier terme 6, nous n'avons beſoin d'eſſayer que les nombres 1, 2, 3, 6, & voici le détail de ces eſſais:

I.) Si $x=1$, on a $1-1-6=-6$.

II.) Si $x=2$, on a $8-2-6=0$.

III.) Si $x=3$, on a $27-3-6=18$.

IV.) Si $x=6$, on a $216-6-6=204$.

Nous voyons par-là que $x=2$ eſt une des racines de l'équation propoſée, & sachant cela il nous eſt facile de trouver les deux autres; car $x=2$ étant une des racines, $x-2$ eſt un facteur de l'équation, & on n'a donc qu'à chercher l'autre facteur par la voie de la Diviſion, ainſi que nous allons le faire:

(*) On verra dans la ſuite, que cette propriété eſt générale pour les équations d'un degré quelconque. Au reſte comme ce tâtonnement exige qu'on connoiſſe tous les diviſeurs du dernier terme de l'équation, on peut avoir recours pour cela aux tables indiquées à l'art. 66.

$$
\begin{array}{l}
x-2)\,x^3 - x - 6\,(xx+2x+3 \\
\quad\; x^3 - 2xx \\
\hline
\qquad\quad 2xx - x - 6 \\
\qquad\quad 2xx - 4x \\
\hline
\qquad\qquad\quad 3x-6 \\
\qquad\qquad\quad 3x-6 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

Puis donc que notre formule se représente par le produit $(x-2)(xx+2x+3)$, elle deviendra $=0$, non-seulement quand $x-2=0$, mais aussi quand $xx+2x+3=0$. Or ce dernier facteur donne $xx=-2x-3$, & par conséquent $x=-1\pm\sqrt{-2}$. Ce sont donc ici les deux autres racines de notre équation, lesquelles sont, comme on le voit, impossibles ou imaginaires.

723.

La méthode que nous venons d'indiquer, n'est applicable immédiatement que lorsque le premier terme x^3 est multiplié par 1,

& que les autres termes de l'équation ont pour coefficiens des nombres entiers. Quand cette condition n'a pas lieu, il faut commencer par une préparation qui consiste à transformer l'équation en une autre qui ait la condition requise, après quoi on fait l'essai que nous avons dit.

Soit donnée, par exemple, l'équation $x^3-3xx+\frac{11}{4}x-\frac{3}{4}=0$; comme elle renferme des quarts, qu'on fasse $x=\frac{y}{2}$, on aura $\frac{y^3}{8}-\frac{3yy}{4}+\frac{11y}{8}-\frac{3}{4}=0$, & en multipliant par 8, on obtiendra l'équation $y^3-6yy+11y-6=0$, dont les racines sont, comme nous l'avons vu plus haut, $y=1$, $y=2$, $y=3$; d'où il s'ensuit que dans l'équation proposée on a I.) $x=\frac{1}{2}$, II.) $x=1$, III.) $x=\frac{3}{2}$.

724.

Qu'on ait une équation, dont le premier terme ait pour coefficient un nombre entier autre que 1, & dont le dernier terme

soit 1; par exemple, $6x^3 - 11xx + 6x - 1 = 0$; si on divise par 6, on aura $x^3 - \frac{11}{6}xx + x - \frac{1}{6} = 0$; on pourroit purger cette équation des fractions, par la regle que nous venons de donner, en supposant $x = \frac{y}{6}$; car on auroit $\frac{y^3}{216} - \frac{11yy}{216} + \frac{y}{6} - \frac{1}{6} = 0$; & en multipliant par 216, il viendroit $y^3 - 11yy + 36y - 36 = 0$. Mais comme il seroit trop long de faire l'essai avec tous les diviseurs du nombre 36, remarquons que puisque le dernier terme de l'équation primitive est 1, il vaut mieux supposer dans cette équation $x = \frac{1}{z}$; car on aura l'équation $\frac{6}{z^3} - \frac{11}{z^2} + \frac{6}{z} - 1 = 0$, qui multipliée par z^3 donne $6 - 11z + 6z^2 - z^3 = 0$, & en transposant tous les termes, $z^3 - 6zz + 11z - 6 = 0$. Les racines sont ici (158) $z=1$, $z=2$, $z=3$; d'où il suit que dans notre équation $x=1$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}$.

725.

On aura observé dans les articles précédens, que pour que les racines soient toutes des nombres positifs, il faut que les signes *plus* & *moins* se suivent alternativement; moyennant quoi l'équation prend cette forme, $x^3 - axx + bx - c = 0$, dans laquelle les signes changent autant de fois qu'il y a de racines positives. Si toutes les trois racines eussent été négatives, & qu'on eût multiplié entr'eux les trois facteurs $x+p$, $x+q$, $x+r$, tous les termes auroient eu le signe *plus*, & la forme de l'équation auroit été $x^3 + axx + bx + c = 0$, où on voit les mêmes signes se suivre *trois* fois, c'est-à-dire, le nombre des racines négatives.

On a donc conclu qu'autant de fois que les signes changent, autant l'équation a de racines positives, & qu'autant de fois que les mêmes signes se succedent, autant l'équation a de racines négatives; & cette

remarque eſt très-importante, parce qu'on ſait par-là ſi c'eſt en *plus* ou en *moins* qu'on doit prendre les diviſeurs du dernier terme, quand on veut faire l'eſſai dont nous avons parlé.

726.

Conſidérons, afin d'éclaircir par un exemple ce que nous venons de dire, l'équation $x^3 + xx - 34x + 56 = 0$, dans laquelle les ſignes changent deux fois, & où ce n'eſt qu'une fois que le même ſigne revient. Nous concluons que l'équation a deux racines poſitives & une racine négative, & comme ces racines doivent être des diviſeurs du dernier terme 56, il faut qu'elles ſoient compriſes dans les nombres $\pm 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56$.

Si nous faiſons maintenant $x = 2$, nous avons $8 + 4 - 68 + 56 = 0$; d'où nous concluons que $x = 2$ eſt une racine poſitive, & qu'ainſi $x - 2$ eſt un diviſeur de notre équation, au moyen de quoi nous trouvons

facilement les deux autres racines; car diviſant effectivement par $x - 2$, on a

$$
\begin{array}{l}
x-2)\ x^3 + xx - 34x + 56\ (xx + 3x - 28 \\
\qquad\ \ \underline{x^3 - 2xx} \\
\qquad\qquad 3xx - 34x + 56 \\
\qquad\qquad \underline{3xx - \ \ 6x\qquad\ } \\
\qquad\qquad\qquad -28x + 56 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-28x + 56} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

Et ſi on fait ce quotient $xx + 3x - 28 = 0$, on trouve les deux autres racines, qui feront $x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 28} = -\frac{3}{2} \pm \frac{11}{2}$, c'eſt-à-dire $x = 4$ & $x = -7$; & tenant compte de la racine trouvée ci-deſſus, $x = 2$, on voit clairement qu'en effet l'équation a deux racines poſitives & une négative. Nous donnerons encore quelques autres exemples pour rendre la choſe encore plus évidente.

727.

Premiere queſtion. On a deux nombres, leur différence eſt 12, leur produit mul-

tiplié par leur somme fait 14560. Quels sont ces nombres?

Soit x le plus petit des deux nombres, le plus grand sera $x+12$, leur produit, $=xx+12x$, multiplié par la somme $2x+12$, donne $2x^3+36xx+144x=14560$; & divisant par 2, on a $x^3+18xx+72x=7280$.

Or le dernier terme 7280 est trop grand pour qu'on puisse entreprendre l'essai de tous ses diviseurs, & nous remarquons qu'il est divisible par 8; c'est pourquoi on fera $x=2y$, parce qu'après la substitution la nouvelle équation, $8y^3+72yy+144y=7280$, étant divisée par 8, se réduira à celle-ci, $y^3+9yy+18y=910$, pour laquelle on n'a besoin d'essayer que les diviseurs 1, 2, 5, 7, 10, 13, &c. du nombre 910. Or il est évident que les premiers, 1, 2, 5, sont trop petits; en commençant donc par la supposition de $y=7$, on trouve aussi tôt que c'est là une des racines; car la substitution donne $343+441+126=910$.

Il suit que $x=14$, & on trouvera les deux autres racines en divisant $y^3+9yy+18y-910$ par $y-7$, ce que nous allons faire:

$$
\begin{array}{l}
y-7)\,y^3+9yy+18y-910\,(yy+16y+130 \\
\quad\underline{y^3-7yy} \\
\qquad 16yy+18y-910 \\
\qquad \underline{16yy-112y} \\
\qquad\qquad 130y-910 \\
\qquad\qquad \underline{130y-910} \\
\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

Supposant maintenant ce quotient $yy+16y+130=0$, on aura $yy=-16y-130$, & de-là $y=-8\pm\sqrt{-66}$: preuve que les deux autres racines sont impossibles.

Réponse. Les deux nombres cherchés sont 14 & 26; leur produit 364, multiplié par leur somme 40, donne 14560.

728.

Seconde question. Trouver deux nombres, dont la différence soit 18, & qui soient tels, que si on multiplie ensemble leur

ſomme & la différence de leurs cubes, on obtienne le nombre 275184.

Soit x le moins grand des deux nombres, $x+18$ ſera le plus grand ; le cube du premier ſera $=x^3$, & le cube du ſecond $=x^3 +54xx+972x+5832$; la différence des cubes $=54xx+972x+5832=54(xx +18x+108)$, multipliée par la ſomme $2x+18$ ou $2(x+9)$, donne le produit $108(x^3+27xx+270x+972)=275184$. Diviſant par 108, on a $x^3+27xx+270x +972=2548$, ou $x^3+27xx+270x =1576$. Les diviſeurs de 1576 ſont 1, 2, 4, 8, &c. les premiers 1, 2 ſont trop petits; mais ſi on eſſaie $x=4$, on trouve que ce nombre ſatisfait à l'équation.

Il reſte donc à la diviſer par $x-4$, afin de trouver les deux autres racines. Cette diviſion donne le quotient $xx+31x+394$; en faiſant donc $xx=-31x-394$, on trouvera $x=-\frac{31}{2}\pm\sqrt{\frac{961}{4}-\frac{1576}{4}}$, c'eſt-à-dire deux racines imaginaires.

Réponſe. Les nombres cherchés ſont 4 & 22.

729.

Troiſieme queſtion. Je cherche deux nombres dont la différence $=720$, & tels que ſi je multiplie le plus petit par la racine quarrée du plus grand, il me vienne 20736.

Si le plus petit eſt x, le plus grand ſera $x+720$, & il faut que $x\sqrt{x+720}=20736 =8.8.4.81$. Quarrant les deux membres, j'ai $xx(x+720)=x^3+720xx=8^2.8^2. 4^2.81^2$. Je fais $x=8y$; cette ſuppoſition me donne $8^3y^3+720.8^2y^2=8^2.8^2.4^2.81^2$; & diviſant par 8^3, j'ai $y^3+90yy=8.4^2. 81^2$. Je ſuppoſe de plus $y=2z$, & j'ai $8z^3+4.90zz=8.4^2.81^2$, ou, en diviſant par 8, $z^3+45zz=4^2.81^2$.

Je fais encore $z=9u$, pour avoir $9^3u^3 +45.9^2uu=4^2.9^4$, parce qu'en diviſant à préſent par 9^3, l'équation ſe réduit à $u^3 +5uu=4^2.9$, ou $uu(u+5)=16.9=144$. Je n'ai pas de peine à voir ici que $u=4$; car dans ce cas $uu=16$ & $u+5=9$. Puis donc que $u=4$, j'ai $z=36$, $y=72$ &

$x=576$, c'est le plus petit des deux nombres cherchés; ainsi le plus grand est 1296, & en effet la racine quarrée de celui-ci, ou 36, multipliée par l'autre nombre 576, donne 20736.

730.

Remarque. Cette question admettoit une solution plus simple; car puisque la racine quarrée du plus grand nombre, multipliée par le plus petit nombre, doit donner un produit égal à un nombre donné, il faut que le plus grand des deux nombres soit un quarré. Si donc, par cette considération, nous le supposons $=xx$, l'autre nombre sera $xx-720$. Celui-ci étant multiplié par la racine quarrée du plus grand, ou par x, nous avons $x^3-720x=20736=64.27.12$. Faisons $x=4y$, nous aurons $64y^3-720.4y=64.27.12$, ou bien $y^3-45y=27.12$. Supposant de plus $y=3z$, nous trouvons $27z^3-135z=27.12$, ou en divisant par 27, $z^3-5z=12$, ou $z^3-5z-12=0$. Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12; les deux premiers sont trop petits; mais la supposition de $z=3$ donne précisément $27-15-12=0$. Par conséquent $z=3$, $y=9$ & $x=36$; d'où nous concluons que le plus grand des deux nombres cherchés, ou xx, $=1296$, & que le plus petit, ou $xx-720$, $=576$, comme ci-dessus.

731.

Quatrieme question. On a deux nombres, dont la différence est 12; le produit de cette différence par la somme des cubes, est 102144: quels sont ces deux nombres?

Nommant x le plus petit de ces deux nombres, le plus grand est $x+12$, le cube du premier est x^3, & le cube du second est $x^3+36xx+432x+1728$; le produit de la somme de ces cubes par la différence 12, est

$$12(2x^3+36xx+432x+1728)=102144;$$

divisant successivement par 12 & par 2, on a

$x^3 + 18xx + 216x + 864 = 4256$, ou
$x^3 + 18xx + 216x = 3392 = 8.8.53$.

Qu'on ſuppoſe $x = 2y$, qu'on ſubſtitue & qu'on diviſe par 8, on aura

$$y^3 + 9yy + 54y = 8.53 = 424.$$

Les diviſeurs du dernier membre ſont 1, 2, 4, 8, 53, &c. 1 & 2 ſont trop petits; mais ſi l'on fait $y = 4$, on trouve $64 + 144 + 216 = 424$. De ſorte que $y = 4$ & $x = 8$; d'où l'on conclut que les deux nombres cherchés ſont 8 & 20.

732.

Cinquieme queſtion. Quelques perſonnes forment une ſociété & établiſſent un fonds, auquel chacune contribue dix fois autant d'écus qu'elles ſont de perſonnes; elles gagnent ſur chaque centieme d'écus 6 écus au-delà du nombre d'écus égal à leur nombre; le profit total eſt de 392 écus; on demande combien ils ſont d'Aſſociés?

Soit x le nombre cherché; chaque Aſſocié aura fourni $10x$ écus, & tous enſemble $10xx$ écus; & puiſqu'ils gagnent $x+6$ pour cent, ils auront gagné avec le capital entier, $\frac{x^3+6xx}{10}$, ce qu'il faut égaler à 392.

On a donc $x^3 + 6xx = 3920$, & en faiſant $x = 2y$ & diviſant par 8, $y^3 + 3yy = 490$. Les diviſeurs du ſecond membre ſont 1, 2, 5, 7, 10, &c. les trois premiers ſont trop petits; mais en ſuppoſant $y = 7$, on a $343 + 147 = 490$; de ſorte que $y = 7$, & $x = 14$.

Réponſe. Il y avoit quatorze Aſſociés, & chacun d'eux a mis 140 écus dans la maſſe commune.

733.

Sixieme queſtion. Quelques Négocians ont en commun un capital de 8240 écus; chacun y ajoute quarante fois autant d'écus qu'ils ſont d'Aſſociés; ils gagnent avec la ſomme totale autant de fois pour cent qu'ils ſont d'Aſſociés; en partageant le profit, il ſe trouve qu'après que chacun a pris dix fois

autant d'écus qu'ils sont d'Associés, il reste 224 écus. On demande quel étoit donc le nombre de ces Associés ?

Si ce nombre est x, chacun aura ajouté $40x$ écus au capital 8240 écus ; par conséquent tous ensemble auront ajouté $40xx$, ce qui a rendu le capital $= 40xx + 8240$; ils gagnent avec cette somme x écus pour cent ; ainsi le gain total est $\frac{40x^3}{100} + \frac{8240x}{100} = \frac{4}{10}x^3 + \frac{824}{10}x = \frac{2}{5}x^3 + \frac{412}{5}x$. C'est de cette somme que chacun préleve $10x$, & par conséquent tous ensemble $10xx$, en laissant un reste de 224 écus ; il faut donc que le profit ait été $10xx + 224$, & qu'on ait l'équation $\frac{2x^3}{5} + \frac{412x}{5} = 10xx + 224$.

Multipliant par 5 & divisant par 2, on a $x^3 + 206x = 25xx + 560$, ou $x^3 - 25xx + 206x - 560 = 0$: la premiere forme sera cependant plus commode pour essayer. Les diviseurs du dernier terme sont 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16 &c. & il faut les prendre positifs, parce que dans la se-

conde forme de l'équation les signes varient trois fois, ce qui donne à connoître avec certitude que toutes les trois racines sont positives.

Or si l'on essaye d'abord $x = 1$ & $x = 2$, il est évident que le premier membre deviendroit plus petit que le second. Nous ferons donc l'essai des autres diviseurs.

Quand $x = 4$, on a $64 + 824 = 400 + 560$, ce qui ne satisfait point.

Quand $x = 5$, on a $125 + 1030 = 625 + 560$, ce qui ne satisfait pas non plus.

Quand $x = 7$, on a $343 + 1442 = 1225 + 560$, ce qui satisfait à l'équation ; de sorte que $x = 7$ en est une racine. Cherchons donc à présent les deux autres, en divisant par $x - 7$ la seconde forme de notre équation.

$$
\begin{array}{l}
x-7)\; x^3 - 25xx + 206x - 560\; (xx - 18x + 80 \\
\quad\; \underline{x^3 - 7xx} \\
\qquad -18xx + 206x \\
\qquad \underline{-18xx + 126x} \\
\qquad\qquad\quad 80x - 560 \\
\qquad\qquad\quad \underline{80x - 560} \\
\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

Egalant le quotient à zéro, nous avons $xx-18x+80=0$ ou $xx=18x-80$, ce qui donne $x=9\pm1$, de ſorte que les deux autres racines ſont $x=8$ & $x=10$.

Réponſe. Trois réponſes ont lieu pour la queſtion propoſée : ſuivant la premiere le nombre des Négocians eſt 7, ſuivant la ſeconde il eſt 8, & ſuivant la troiſieme il eſt 10; le tableau ſuivant préſente la preuve de toutes :

	I.	II.	III.
Nombre des Négocians	7	8	10
Chacun fournit $40x$ - - -	280	320	400
Tous enſemble ajoutent $40xx$	1960	2560	4000
L'ancien capital étoit - -	8240	8240	8240
Le capital entier eſt $40xx$ $+8240$ - - - - - - -	10200	10800	12240
Ils gagnent avec ce capital autant pour cent qu'ils ſont d'Aſſociés - - - -	714	864	1224
Chacun en ôte $10x$ - - -	70	80	100
Ainſi tous enſemble prennent $10xx$ - - - - -	490	640	1000
Donc il reſte - - - - - -	224	224	224

CHAPITRE XII.

De la Regle de CARDAN *ou de* SCIPION FERREO.

734.

LORSQU'ON a chaſſé les fractions d'une équation du troiſieme degré, ſuivant la maniere enſeignée, & qu'aucun des diviſeurs du dernier terme ne ſe trouve être une racine de l'équation, c'eſt une marque certaine, non-ſeulement que l'équation n'a pas de racine en nombres entiers, mais qu'une racine fractionnaire même ne peut avoir lieu; c'eſt ce que nous allons prouver.

Soit l'équation $x^3-axx+bx-c=0$, où a, b, c ſignifient des nombres entiers; ſi on vouloit ſuppoſer, par exemple, $x=\frac{3}{2}$, on auroit $\frac{27}{8}-\frac{9}{4}a+\frac{3}{2}b-c$; or le premier terme a ſeul ici 8 pour dénominateur; tous les autres ſont, ou des nombres entiers, ou diviſés ſeulement par 4 ou par 2, &

ne peuvent par conséquent faire o avec le premier terme : la même chose a lieu pour toute autre fraction.

735.

Comme donc dans ces cas les racines de l'équation ne sont ni des nombres entiers, ni des fractions, elles sont irrationnelles, ou même, ce qui arrive souvent, imaginaires. Or la maniere de les exprimer alors & de déterminer les signes radicaux qui les affectent, fait un point très-important, & qui mérite d'être expliqué ici avec soin. On attribue cette méthode, qu'on nomme *la regle de Cardan*, à *Cardan*, ou plutôt à *Scipion Ferreo*, qui ont vécu il y a quelques siecles (*).

736.

Il faut, pour entrer dans l'esprit de cette regle, considérer d'abord avec attention la nature d'un cube, dont la racine est un binome.

(*) L'histoire de cette regle, découverte dans le même temps par *Tartaléa*, se lit avec autant d'intérêt que de fruit dans l'*Histoire des Mathématiques*, par M. *de Montuc la*

Soit $a+b$ cette racine, le cube en est $a^3+3aab+3abb+b^3$, & nous voyons qu'il est composé des cubes des deux termes du binome, & outre cela de deux termes moyens, $3aab+3abb$, qui ont le facteur commun $3ab$, lequel multiplie l'autre facteur $a+b$; c'est-à-dire que ces deux termes contiennent le triple produit des deux termes du binome, multiplié par la somme de ces termes.

737.

Qu'on suppose maintenant $x=a+b$, & qu'on prenne de part & d'autre le cube, on a $x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. Or puisque $a+b=x$, on aura l'équation du troisieme degré, $x^3=a^3+b^3+3abx$ ou $x^3=3abx+a^3+b^3$, dont nous savons qu'une des racines est $x=a+b$. Toutes les fois donc qu'il se présente une telle équation, nous pouvons en assigner une racine.

Soit, par exemple, $a=2$ & $b=3$, on aura l'équation $x^3=18x+35$, que nous savons avec certitude avoir $x=5$ pour racine.

738.

Que de plus on suppose à présent $a^3=p$ & $b^3=q$, on aura $a=\sqrt[3]{p}$ & $b=\sqrt[3]{q}$, par conséquent $ab=\sqrt[3]{pq}$; lors donc que l'on rencontre une équation du troisieme degré de la forme $x^3=3x\sqrt[3]{pq}+p+q$, on sait qu'une des racines est $\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$.

Or on peut toujours déterminer p & q, de maniere que tant $3\sqrt[3]{pq}$ que $p+q$ soient des quantités égales à un nombre donné; ainsi on est toujours en état de résoudre une équation du troisieme degré, de l'espece dont nous parlons.

739.

Soit proposée en général l'équation $x^3=fx+g$; il s'agira ici de comparer f avec

$3\sqrt[3]{pq}$, & g avec $p+q$; c'est-à-dire qu'il faudra déterminer p & q de maniere que $3\sqrt[3]{pq}$ devienne égal à f, & que $p+q$ devienne égal à g; car nous savons alors qu'une des racines de notre équation sera $x=\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$.

740.

Nous avons donc à résoudre ces deux équations, I.) $3\sqrt[3]{pq}=f$, & II.) $p+q=g$. La premiere donne $\sqrt[3]{pq}=\frac{f}{3}$, & $pq=\frac{f^3}{27}=\frac{1}{27}f^3$, & $4pq=\frac{4}{27}f^3$. La seconde équation étant quarrée, donne $pp+2pq+qq=gg$; si l'on en soustrait $4pq=\frac{4}{27}f^3$, on a $pp-2pq+qq=gg-\frac{4}{27}f^3$, & prenant la racine quarrée de part & d'autre, on a $p-q=\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}$. Or puisque $p+q=g$, on a $2p=g+\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}$, & $2q=g-\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}$, par conséquent $p=\frac{g+\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}}{2}$, & $q=\frac{g-\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}}{2}$.

741.

Toutes les fois donc qu'on a une équation du troisieme degré de la forme $x^3 = fx + g$, quels que soient les nombres f & g, on a toujours pour une des racines

$$x = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}};$$

c'est-à-dire une quantité irrationnelle, qui renferme non-seulement le signe radical quarré, mais aussi le signe de la racine cubique; & c'est cette formule qu'on nomme proprement la *regle de Cardan*.

742.

Appliquons-la à quelques exemples, pour en mieux faire comprendre l'usage.

Soit $x^3 = 6x + 9$, on aura $f = 6$ & $g = 9$; ainsi $gg = 81$, $f^3 = 216$, & $\frac{4}{27}f^3 = 32$; puis $gg - \frac{4}{27}f^3 = 49$, & $\sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3} = 7$. Donc une des racines de l'équation donnée est $x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$.

743.

Soit proposée cette autre équation $x^3 = 3x + 2$; on aura $f = 3$ & $g = 2$; par conséquent $gg = 4$, $f^3 = 27$, & $\frac{4}{27}f^3 = 4$; ce qui nous donne $\sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3} = 0$; d'où il s'ensuit qu'une des racines est $x = \sqrt[3]{\frac{2+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2-0}{2}} = 1 + 1 = 2$.

744.

Il arrive souvent cependant que, quoiqu'une telle équation ait une racine rationnelle, on ne peut trouver cette racine par la regle dont nous nous occupons.

Soit donnée l'équation $x^3 = 6x + 40$, où $x = 4$ est une des racines. Nous avons ici $f = 6$ & $g = 40$, de plus $gg = 1600$ & $\frac{4}{27}f^3 = 32$; ainsi $gg - \frac{4}{27}f^3 = 1568$, & $\sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3} = \sqrt{1568} = \sqrt{4.4.49.2} = 28\sqrt{2}$; par conséquent une des racines $x = \sqrt[3]{\frac{40 + 28\sqrt{2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{40 - 28\sqrt{2}}{2}}$, ou

$x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$; & cette quantité eſt réellement $=4$, quoiqu'à la premiere inſpection on ne s'en doute pas. En effet le cube de $2+\sqrt{2}$ étant $20+14\sqrt{2}$, on a réciproquement la racine cubique de $20+14\sqrt{2}$ égale à $2+\sqrt{2}$; de même $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}$; donc notre racine $x=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$ (*).

745.

On pourroit objecter à cette regle, qu'elle ne s'étend pas à toutes les équations du troiſieme degré, parce que le quarré de x ne s'y rencontre point, c'eſt-à-dire

(*) On n'a pas pour l'extraction de la racine cubique de ces binomes, des regles générales comme pour l'extraction de la racine quarrée ; celles que différens Auteurs ont données ramenent toujours à une équation mixte du troiſieme degré ſemblable à la propoſée. Au reſte, quand l'extraction de la racine cubique eſt poſſible, la ſomme des deux radicaux qui repréſentent la racine de l'équation, devient toujours rationnelle, de ſorte qu'on peut la trouver immédiatement par la méthode indiquée à l'article 722.

que le ſecond terme manque dans l'équation. Mais nous remarquerons que toute équation complette peut ſe transformer en une autre où le ſecond terme manque, après quoi l'on peut par conſéquent appliquer la regle.

Soit, pour le prouver, l'équation complette $x^3-6xx+11x-6=0$. Si l'on prend ici le tiers du coefficient 6 du ſecond terme, & qu'on faſſe $x-2=y$, on aura $x=y+2$, $xx=yy+4y+4$, & $x^3=y^3+6yy+12y+8$; par conſéquent

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3+6yy+12y+8 \\ -6xx = & \quad -6yy-24y-24 \\ +11x = & \qquad\quad +11y+22 \\ -6 = & \qquad\qquad\quad -6 \\ \hline x^3-6xx+11x-6 = & y^3 \qquad\quad -y. \end{array}$$

On a donc l'équation $y^3-y=0$, dont la réſolution eſt manifeſte, puiſqu'on voit ſur le champ qu'elle eſt le produit des facteurs $y(yy-1)=y(y+1)(y-1)=0$.

Si l'on fait maintenant chacun de ces facteurs $=0$, on a

I. $\begin{cases} y=0, \\ x=2, \end{cases}$ II. $\begin{cases} y=-1, \\ x=\ \ 1, \end{cases}$ III. $\begin{cases} y=1, \\ x=3, \end{cases}$

c'est-à-dire, les trois racines trouvées déjà plus haut.

746.

Soit donnée à présent l'équation générale du troisieme degré, $x^3+axx+bx+c=0$, de laquelle il s'agisse d'éliminer le second terme.

On ajoutera pour cet effet à x le tiers du coefficient du second terme, en conservant le même signe, & on écrira pour cette somme une nouvelle lettre, par exemple, y; de sorte qu'on aura $x+\frac{1}{3}a=y$, & $x=y-\frac{1}{3}a$, d'où résulte le calcul suivant:

$$x=y-\tfrac{1}{3}a,\quad xx=yy-\tfrac{2}{3}ay+\tfrac{1}{9}aa,$$

$$\&\ x^3=y^3-ayy+\tfrac{1}{3}aay-\tfrac{1}{27}a^3;$$

par conséquent

$$\begin{array}{rrrr}
x^3= & y^3-ayy & +\frac{1}{3}aay & -\frac{1}{27}a^3 \\
axx= & +ayy & -\frac{2}{3}aay & +\frac{1}{9}a^3 \\
bx= & & +\ by & -\frac{1}{3}ab \\
c= & & & +c \\
\hline
\end{array}$$

$$y^3-(\tfrac{1}{3}aa-b)y+\tfrac{2}{27}a^3-\tfrac{1}{3}ab+c=0,$$

équation dans laquelle le second terme manque.

747.

Nous sommes en état, moyennant cette transformation, de trouver les racines de toutes les équations du troisieme degré; l'exemple qui suit en fournira une preuve.

L'équation proposée est $x^3-6xx+13x-12=0$.

Il s'agit d'abord de chasser le second terme; on fera pour cet effet $x-2=y$, & on aura $x=y+2$, $xx=yy+4y+4$, & $x^3=y^3+6yy+12y+8$; donc

$$\begin{array}{rrrrr}
x^3= & y^3 & +6yy & +12y & +\ 8 \\
-6xx= & & -6yy & -24y & -24 \\
+13x= & & & +13y & +26 \\
-12= & & & & -12 \\
\hline
 & y^3 & & +\ y & -\ 2=0
\end{array}$$

ou $y^3=-y+2$.

Si on compare cette équation avec la formule $x^3=fx+g$, on a $f=-1$, $g=2$;

donc $gg=4$, & $\frac{4}{27}f^3=-\frac{4}{27}$; de plus $gg-\frac{4}{27}f^3=4+\frac{4}{27}=\frac{112}{27}$, & $\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}=\sqrt{\frac{112}{27}}=\frac{4\sqrt{21}}{9}$; par conséquent

$$y=\sqrt[3]{\left(\frac{2+\frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{2-\frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)},$$ ou

$$y=\sqrt[3]{1+\frac{2\sqrt{21}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{2\sqrt{21}}{9}}=\sqrt[3]{\frac{9+2\sqrt{21}}{9}}+\sqrt[3]{\frac{9-2\sqrt{21}}{9}}=\sqrt[3]{\frac{27+6\sqrt{21}}{27}}+\sqrt[3]{\frac{27-6\sqrt{21}}{27}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{27+6\sqrt{21}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{27-6\sqrt{21}};$$ & il reste à substituer cette valeur dans $x=y+2$.

748.

Nous sommes parvenus dans la solution de cet exemple, à une quantité doublement irrationnelle; mais il ne faut pas en conclure sur le champ que la racine est irrationnelle, parce qu'il pourroit arriver par un heureux hasard, que les binomes $27\pm6\sqrt{21}$ fussent des cubes effectifs; & c'est aussi ce qui a lieu ici; car le cube

de $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ étant $\frac{216+48\sqrt{21}}{8}=27+6\sqrt{21}$, il suit que la racine cubique de $27+6\sqrt{21}$ est $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$, & que la racine cubique de $27-6\sqrt{21}$ est $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$. Cela fait donc que la valeur trouvée pour y, devient $y=\frac{1}{3}\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. Or puisque $y=1$, nous avons $x=3$ pour une des racines de l'équation proposée, & les deux autres se trouveront en divisant l'équation par $x-3$.

$$\begin{array}{l}
x-3)\ x^3-6xx+13x-12\ (xx-3x+4\\
\quad x^3-3xx\\
\hline
\quad -3xx+13x-12\\
\quad -3xx+9x\\
\hline
\qquad 4x-12\\
\qquad 4x-12\\
\hline
\qquad 0.
\end{array}$$

Et en égalant à o le quotient $xx - 3x + 4$; l'on a $xx = 3x - 4$, & $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{16}{4}}$ $= \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$. Ce ſont les deux racines en queſtion, mais elles ſont imaginaires.

749.

C'eſt par haſard, comme nous l'avons remarqué, qu'on a pu, dans l'exemple précédent, extraire la racine cubique des binomes trouvés, & ce cas n'a lieu que lorſque l'équation a une racine rationnelle, & que par conſéquent on emploie avec plus de facilité, pour trouver cette racine, les regles du Chapitre précédent. Mais quand aucune racine rationnelle n'a lieu, il n'eſt pas poſſible au contraire d'exprimer autrement la racine qu'on trouve, qu'en ſuivant la regle de *Cardan*; de ſorte qu'il eſt impoſſible alors d'appliquer des réductions. Par exemple, dans l'équation $x^3 = 6x + 4$, on a $f = 6$ & $g = 4$; de ſorte

que $x = \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}}$, ce qui ne peut s'exprimer d'une maniere différente (*).

(*) On a dans cet exemple $\frac{4}{27} f^3$ plus petit que gg, ce qui eſt le cas très-connu ſous le nom du *cas irréductible du troiſieme degré*, & qui eſt d'autant plus remarquable, qu'alors toutes les trois racines ſont toujours réelles. On ne peut dans ce cas faire uſage de la formule de *Cardan*, qu'en y appliquant des méthodes d'approximation, par exemple, en la transformant en une ſérie infinie. M. *Lambert* a donné dans l'ouvrage cité à l'article 40, des tables particulieres qui ſervent à trouver facilement les valeurs numériques des racines des équations du troiſieme degré, tant dans le cas irréductible que dans les autres cas. On peut auſſi employer pour cet uſage les tables ordinaires des ſinus. Voyez l'*Aſtronomie ſphérique* de M. *Mauduit*, imprimée à Paris en 1765.

Au reſte il ne faut pas chercher dans cet Ouvrage de M. *Euler*, tout ce qu'il y avoit à dire ſur les réſolutions, ſoit directes, ſoit approchées, des équations. Il avoit à traiter encore trop d'objets curieux & importans, pour s'appeſantir ſur ces matieres; mais qu'on conſulte l'*Hiſtoire des Mathématiques*, l'*Algebre* de M. *Clairaut*, le *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, & les derniers volumes des Mémoires des Académies des Sciences de Paris & de Berlin, on y trouvera à peu près tout ce qu'on ſait aujourd'hui ſur la réſolution des équations.

CHAPITRE XIII.

De la résolution des Equations du quatrieme degré.

750.

LORSQUE la plus haute puissance de la quantité x monte au quatrieme degré, on a des *équations du quatrieme degré*, & la formule générale en est

$$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0.$$

Nous considérerons en premier lieu les équations du quatrieme degré *pures*, dont la formule est simplement $x^4 = f$, & dont on trouve aussi-tôt la racine en prenant de part & d'autre la racine bi-quarrée, puisqu'on obtient $x = \sqrt[4]{f}$.

751.

Comme x^4 est le quarré de xx, on se facilite beaucoup le calcul en commençant par extraire la racine quarrée; car on aura

alors $xx = \sqrt{f}$: & prenant ensuite de nouveau la racine quarrée, on a $x = \sqrt{\sqrt{f}}$; de sorte que $\sqrt[4]{f}$ n'est autre chose que la racine quarrée de la racine quarrée de f.

Si on avoit, par exemple, l'équation $x^4 = 2401$, on auroit d'abord $xx = 49$, & après cela $x = 7$.

752.

Il est vrai que voilà seulement une racine, & cependant puisqu'on trouve toujours trois racines cubiques, il n'est pas douteux que quatre racines ne doivent avoir lieu ici; mais remarquons que la méthode indiquée ne laisse pas de donner en effet ces quatre racines. Car dans l'exemple ci-dessus on a non-seulement $x = 49$, mais aussi $x = -49$; or la premiere valeur donne les deux racines $x = 7$ & $x = -7$, & la seconde valeur donne $x = \sqrt{-49} = 7\sqrt{-1}$, & $x = -\sqrt{-49} = -7\sqrt{-1}$. Et voilà les quatre racines quarré-quarrées de 2401. Il en seroit de même à l'égard d'autres nombres.

753.

Après ces équations pures viennent dans l'ordre celles où le second & le quatrieme terme manquent, & qui ont la forme $x^4 + fxx + g = 0$. Elles sont résolubles, suivant la regle, pour les équations du second degré; car si l'on fait $xx = y$, on a $yy + fy + g = 0$, ou $yy = -fy - g$, d'où l'on tire

$$y = -\tfrac{1}{2}f \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}ff - g} = -\frac{f \pm \sqrt{ff-4g}}{2};$$

or $xx = y$; ainsi $x = \pm\sqrt{\frac{-f \pm \sqrt{ff-4g}}{2}}$, où les signes doubles $\pm$ indiquent toutes les quatre racines.

754.

Mais si l'équation contient tous les termes possibles, on peut toujours la regarder comme le produit de quatre facteurs. En effet si l'on multiplie entr'eux ces quatre facteurs, $(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$, on trouve le produit $x^4 - (p+q+r+s)x^3 + (pq+pr+ps+qr+qs+rs)\,xx - (pqr$

+

$+ pqs + prs + qrs)\,x + pqrs$, & cette formule ne peut devenir égale à o, que lorsqu'un de ces quatre facteurs est $= 0$. Or cela peut arriver en quatre manieres: I.) quand $x = p$, II.) quand $x = q$, III.) quand $x = r$, IV.) quand $x = s$; & ce sont-là par conséquent les quatre racines de l'équation.

755.

Si nous considérons cette formule avec quelque attention, nous remarquons, dans le second terme, la somme des quatre racines, multipliée par $-x^3$; dans le troisieme terme, la somme de tous les produits possibles de deux racines, multipliée par xx; dans le quatrieme terme, la somme des produits des racines multipliées trois à trois, multipliée par $-x$; enfin dans le cinquieme terme, le produit de toutes les quatre racines multipliées ensemble.

756.

Comme le dernier terme contient le produit de toutes les racines, il est clair

qu'une telle équation du quatrieme degré ne peut avoir une racine rationnelle qui ne ſoit en même temps un diviſeur du dernier terme. Ce principe fournit donc un moyen facile de déterminer toutes les racines rationnelles, lorſqu'il y en a; puiſqu'on n'a qu'à ſubſtituer ſucceſſivement à x tous les diviſeurs du dernier terme, juſqu'à ce qu'on en trouve un qui ſatisfaſſe à l'équation; car ayant trouvé une telle racine, par exemple, $x=p$, on n'a qu'à diviſer l'équation par $x-p$, après avoir porté tous les termes du même côté, & ſuppoſer enſuite le quotient $=0$; on obtiendra une équation du troiſieme degré, qu'on pourra réſoudre par les regles données ci-deſſus.

757.

Or il eſt abſolument néceſſaire pour cela que tous les termes conſiſtent en des nombres entiers, & que le premier n'ait que l'unité pour coefficient; toutes les fois donc que quelques termes renferment des fractions, il faudra commencer par éliminer ces fractions, & c'eſt ce qu'on peut toujours faire en ſubſtituant, au lieu de x, la quantité y, diviſée par un nombre qui renferme tous les dénominateurs de ces fractions.

Par exemple, ſi l'on a l'équation $x^4 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{3} xx + \frac{3}{4} x + \frac{1}{18} = 0$, comme on y rencontre des fractions qui ont pour dénominateurs 2, 3 & des puiſſances de ces nombres, on ſuppoſera $x = \frac{y}{6}$, & on aura $\frac{y^4}{6^4} - \frac{\frac{1}{2} y^3}{6^3} + \frac{\frac{1}{3} yy}{6^2} - \frac{\frac{3}{4} y}{6} + \frac{1}{18} = 0$, équation, qui multipliée par 6^4 devient $y^4 - 3y^3 + 12yy - 162y + 72 = 0$.

Si l'on vouloit chercher maintenant ſi cette équation a des racines rationnelles, il faudroit écrire à la place de y ſucceſſivement les diviſeurs de 72, afin de voir dans quels cas la formule ſe réduiroit réellement à 0.

758.

Mais comme les racines peuvent être aussi bien positives que négatives, il faudroit avec chaque diviseur faire deux essais, l'un en supposant ce diviseur positif, l'autre en le regardant comme négatif; cependant une nouvelle remarque en dispense souvent (*). Toutes les fois que les signes + & — se suivent réguliérement, l'équation a autant de racines positives, qu'il y a de changemens dans les signes; & autant de fois que les mêmes signes reviennent sans interruption, autant l'équation a de racines négatives. Or notre exemple contient quatre changemens de signes & aucune succession; ainsi toutes les racines sont positives, & on n'a pas besoin de prendre aucun des diviseurs du dernier terme en moins.

(*) Cette regle est générale pour les équations de tous les degrés, pourvu qu'il n'y ait point de racines imaginaires; les François l'attribuent à *Descartes*, les Anglois à *Harriot;* mais M. l'Abbé *de Gua* est le premier qui en ait donné une démonstration générale. Voyez les *Mém. de l'Académie des Sciences de Paris*, pour 1741.

759.

Soit donnée l'équation $x^4 + 2x^3 - 7xx - 8x + 12 = 0$.

Nous voyons ici deux changemens de signes, mais aussi deux successions; d'où nous concluons avec certitude, que cette équation contient deux racines positives & autant de racines négatives, qui doivent toutes être des diviseurs du nombre 12. Or ces diviseurs sont 1, 2, 3, 4, 6, 12; qu'on essaye donc d'abord $x = +1$, on parviendra réellement à 0; donc une des racines est $x = 1$.

Si l'on fait ensuite $x = -1$, on trouve $+1 - 2 - 7 + 8 + 12 = 21 - 9 = 12$; ainsi $x = -1$ n'est pas une des racines. Qu'on fasse après cela $x = 2$, on trouve de nouveau la formule $= 0$, & par conséquent, pour une des racines, $x = 2$; mais $y = -2$ au contraire ne se trouve pas être une racine. Lorsqu'on fait ensuite $x = 3$, on a $81 + 54 - 63 - 24 + 12 = 60$, c'est-à-dire

que cette supposition ne satisfait pas; au lieu que $x=-3$, donnant $81-54-63+24+12=0$, est évidemment une des racines qu'on cherche. Enfin, quand on aura essayé $x=-4$, on verra pareillement l'équation se réduire à zéro; de sorte donc que toutes les quatre racines sont rationnelles, & ont les valeurs suivantes: I.) $x=1$, II.) $x=2$, III.) $x=-3$, IV.) $x=-4$; & conformément à la regle donnée ci-dessus, deux de ces racines sont positives, & les deux autres sont négatives.

760.

Mais aucune racine ne pouvant être déterminée par cette voie, lorsque les racines sont toutes irrationnelles, il a fallu songer à des expédiens pour exprimer les racines dans ce cas. On y a réussi au point qu'on a découvert deux routes différentes pour parvenir à la connoissance de semblables racines, quelle que soit la nature de l'équation du quatrieme degré.

Il sera bon, avant que d'expliquer ces méthodes générales, que nous donnions les solutions de quelques cas particuliers, lesquelles peuvent souvent s'appliquer très-utilement.

761.

Lorsque l'équation est de nature, que les coefficiens des termes se suivent de la même maniere, tant dans l'ordre direct des termes, que dans l'ordre rétrograde, comme il arrive dans l'équation suivante (*):

$$x^4+mx^3+nxx+mx+1=0,$$

ou dans cette autre équation qui est plus générale:

(*) On peut nommer ces équations *réciproques*, parce qu'elles ne changent point en y mettant $\frac{1}{x}$ à la place de x. Il suit de cette propriété que si a, par exemple, est une des racines, $\frac{1}{a}$ en sera une aussi; c'est la raison pourquoi ces sortes d'équations peuvent se réduire à d'autres équations, dont le degré est plus petit de la moitié. M. de *Moivre* donne dans ses *Miscellanea analytica*, p. 71, des formules générales pour la réduction de ces sortes d'équations, de quelque degré qu'elles soient.

$x^4 + max^3 + naaxx + ma^3 x + a^4 = 0.$

On peut toujours regarder une telle formule comme le produit de deux facteurs, qui sont des formules du second degré, & qu'on résout facilement. En effet, qu'on représente cette derniere équation par le produit $(xx + pax + aa)(xx + qax + aa) = 0$, où il s'agisse de déterminer p & q de maniere qu'on obtienne l'équation susdite, on trouvera, en effectuant la multiplication, $x^4 + (p + q) ax^3 + (pq + 2) aaxx + (p + q) a^3 x + a^4 = 0$; & pour que cette équation soit la même que la précédente, il faut 1°. que $p + q = m$, 2°. que $pq + 2 = n$, & par conséquent que $pq = n - 2$.

Maintenant, quarrant la premiere de ces égalités, on a $pp + 2pq + qq = mm$; si on soustrait de ceci la seconde, prise quatre fois, ou $4pq = 4n - 8$, il reste $pp - 2pq + qq = mm - 4n + 8$; & prenant la racine quarrée, on trouve $p - q = \sqrt{mm - 4n + 8}$. Or $p + q = m$, on aura donc par l'addition,

$2p = m + \sqrt{mm - 4n + 8}$, ou $p = \frac{m + \sqrt{mm - 4n + 8}}{2}$; & par la soustraction, $2q = m - \sqrt{mm - 4n + 8}$ ou $q = \frac{m - \sqrt{mm - 4n + 8}}{2}$. Ayant donc trouvé p & q, on n'a plus qu'à supposer chaque facteur $= 0$; afin de déterminer les valeurs de x: le premier donne $xx + pax + aa = 0$, ou $xx = -pax - aa$, d'où l'on tire $x = -\frac{pa}{2} \pm \sqrt{\frac{ppaa}{4} - aa}$, ou $x = -\frac{pa}{2} \pm \frac{1}{2} a\sqrt{pp - 4}$; le second facteur donne $x = -\frac{qa}{2} \pm \frac{1}{2} a\sqrt{qq - 4}$; & ce sont-là les quatre racines de l'équation proposée.

762.

Pour rendre cet article plus clair, soit donnée l'équation $x^4 - 4x^3 - 3xx - 4x + 1 = 0$. Nous avons ici $a = 1$, $m = -4$, $n = -3$; par conséquent $mm - 4n + 8 = 36$, & la racine quarrée de cette quantité $= 6$; donc $p = -\frac{4+6}{2} = 1$, & $q = -\frac{4-6}{2} = -5$; de-là résultent les quatre racines I.) & II.) $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-3} = -\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; & III.)

& IV.) $x=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21}=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$, c'eſt-à-d. que les quatre racines de l'équation propoſée ſont:

I.) $x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, III.) $x=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$,

II.) $x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, IV.) $x=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

Les deux premieres de ces racines ſont imaginaires ou impoſſibles; mais les deux dernieres ſont poſſibles; puiſqu'on peut indiquer $\sqrt{21}$ auſſi exactement qu'on le ſouhaite, en exprimant cette racine par des fractions décimales. En effet, 21 étant autant que 21,00000000, on n'a qu'à tirer la racine quarrée, comme il ſuit:

```
21|00|00|00|00|00|4,5825
16
 85|500
   |425
 908|7500
    |7264
 9162|23600
     |18324
  91645|527600
       |458225
         69375.
```


Puis donc que $\sqrt{21}=4,5825$, la troiſieme racine approche d'aſſez près $x=4,7912$, & la quatrieme, $x=0,2087$; & il eût été facile de déterminer ces racines avec encore plus de préciſion.

Remarquons que la quatrieme racine étant à très-peu près $\frac{2}{10}$ ou $\frac{1}{5}$, cette valeur ſatisfera déjà aſſez exactement à l'équation; en effet, ſi l'on fait $x=\frac{1}{5}$, on trouve $\frac{1}{625}-\frac{4}{125}-\frac{3}{25}-\frac{4}{5}+1=\frac{31}{625}$; on auroit dû trouver o, mais la différence, comme on voit, n'eſt pas grande.

763.

Le ſecond cas où une réſolution ſemblable a lieu, eſt le même que le premier quant aux coefficiens, mais il en differe dans les ſignes; car nous ſuppoſerons que le ſecond & le quatrieme termes ayent des ſignes differens; une telle équation eſt donc, par exemple:

$x^4+max^3+naaxx-ma^3x+a^4=0$,

qui peut être représentée par le produit, $(xx+pax-aa)(xx+qax-aa)=0$. Car la multiplication réelle de ces facteurs donne

$$x^4+(p+q)ax^3+(pq-2)aaxx-(p+q)a^3x+a^4,$$

quantité qui est égale à la formule proposée, si on suppose en premier lieu $p+q=m$, & en second lieu $pq-2=n$, ou $pq=n+2$; parce que de cette façon les quatriemes termes deviennent égaux d'eux-mêmes. Qu'on quarre, comme ci-dessus, la premiere équation, on aura $pp+2pq+qq=mm$; qu'on soustraye de celle-ci la seconde prise quatre fois, ou $4pq=4n+8$, il restera $pp-2pq+qq=mm-4n-8$; la racine quarrée est $p-q=\sqrt{mm-4n-8}$, & de-là on obtient $p=\frac{m+\sqrt{mm-4n-8}}{2}$ & $q=\frac{m-\sqrt{mm-4n-8}}{2}$. Ayant donc trouvé p & q, on connoîtra par le premier facteur les deux racines $x=-\frac{1}{2}pa\pm\frac{1}{2}a\sqrt{pp+4}$, & par le second facteur

les deux racines $x=-\frac{1}{2}qa\pm\frac{1}{2}a\sqrt{qq+4}$, c'est-à-dire qu'on aura les quatre racines de l'équation proposée.

764.

Soit donnée l'équation $x^4-3.2x^3+3.8x+16=0$, nous avons $a=2$ & $m=-3$, & $n=0$; ainsi $\sqrt{mm-4n-8}=1$, & par conséquent

$$p=\frac{-3+1}{2}=-1, \text{ \& } q=\frac{-3-1}{2}=-2.$$

Donc les deux premieres racines sont $x=1\pm\sqrt{5}$, & les deux dernieres sont $x=2\pm\sqrt{8}$; moyennant quoi les quatre racines cherchées seront: I.) $x=1+\sqrt{5}$, II.) $x=1-\sqrt{5}$, III.) $x=2+\sqrt{8}$, IV.) $x=2-\sqrt{8}$. Par conséquent les quatre facteurs de notre équation seront $(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{8})(x-2+\sqrt{8})$, & leur multiplication effective produit réellement cette équation; car les deux premiers étant multipliés entr'eux, donnent $xx-2x-4$, & les deux autres donnent

$xx - 4x - 4$; or ces deux produits multipliés pareillement l'un par l'autre, font $x^4 - 6x^3 + 24x + 16$, ce qui est précisément l'équation proposée.

CHAPITRE XIV.

De la Regle de BOMBELLI, *pour réduire la résolution des Equations du quatrieme degré à celle des Equations du troisieme degré.*

765.

Nous avons fait voir plus haut, comment on résout, par la regle de *Cardan*, les équations du troisieme degré; ainsi tout consiste principalement, pour les équations du quatrieme, à en réduire la résolution à celle des équations du troisieme degré. C'est qu'il n'est pas possible de résoudre généralement les équations du quatrieme degré sans le secours de celles du

troisieme, vu qu'ayant même déterminé une des racines, les autres ne laissent pas de dépendre d'une équation du troisieme degré. Et on peut conclure de-là qu'aussi les équations de dimensions plus hautes, présupposent la résolution de toutes les équations de degrés inférieurs.

766.

Or il y a déjà quelques siecles qu'un Italien, nommé *Bombelli*, a donné une regle pour cela, que nous nous proposons d'expliquer dans ce Chapitre (*).

Soit donnée l'équation générale du quatrieme degré, $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$, où les lettres a, b, c, d signifient tous les nombres imaginables. Qu'on suppose maintenant que cette équation soit la même que celle-ci, $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, où il s'agisse de déter-

(*) Cette méthode appartient plutôt à *Louis Ferrari*. On la nomme improprement la *regle de Bombelli*, ainsi qu'on attribue à *Cardan* la méthode imaginée par *Scipion Ferreo*.

miner les lettres p, q & r, de maniere qu'on obtienne l'équation proposée. Si on range la nouvelle équation, on aura

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + \tfrac{1}{4}aaxx + \; & apx + pp \\ + \; & 2pxx - 2qrx - rr \\ - \; & qqxx. \end{aligned}$$

Or les deux premiers termes sont ici déjà les mêmes que dans l'équation donnée ; le troisieme terme exige qu'on fasse $\frac{1}{4}aa + 2p - qq = b$, ce qui donne $qq = \frac{1}{4}aa + 2p - b$; le quatrieme terme indique qu'on doit faire $ap - 2qr = c$, ou $2qr = ap - c$; enfin on a pour le dernier terme $pp - rr = d$, ou $rr = pp - d$. Voilà donc trois équations qui doivent donner les valeurs de p, q & r.

767.

La maniere la plus facile d'en tirer ces valeurs est la suivante : qu'on prenne la premiere équation quatre fois, on aura $4qq = aa + 8p - 4b$; cette équation multipliée par la derniere, $rr = pp - d$, donne

$$4qqrr = 8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b).$$

Si de plus on quarre la seconde équation, on aura $4qqrr = aapp - 2acp + cc$. Ainsi nous avons pour $4qqrr$ deux valeurs qu'on peut égaler entr'elles, ce qui fournit l'équation $8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b) = aapp - 2acp + cc$, ou, en portant tous les termes d'un même côté, $8p^3 - 4bpp + (2ac - 8d)p - aad + 4bd - cc = 0$, équation du troisieme degré, qui donnera toujours la valeur de p par les regles exposées plus haut.

768.

Ayant donc déterminé les trois valeurs de p par les données a, b, c, d, ce qui ne demande que d'avoir trouvé une seule de ces valeurs, on aura aussi les valeurs des deux autres lettres q & r; car la premiere équation donnera $q = \sqrt{\frac{1}{4}aa + 2p - b}$, & la seconde donne $r = \frac{ap - c}{2q}$. Or ces trois valeurs étant déterminées pour chaque cas

donné, voici comment on pourra trouver enfin les quatre racines de l'équation proposée :

Cette équation ayant été réduite à la forme $(xx+\frac{1}{2}axp)^2-(qx+r)^2=0$, on aura $(xx+\frac{1}{2}ax+p)^2=(qx+r)^2$, & en tirant la racine, $xx+\frac{1}{2}ax+p=qx+r$, ou bien $xx+\frac{1}{2}ax+p=-qx-r$. La premiere équation donne $xx=(q-\frac{1}{2}a)x-p+r$, d'où l'on peut avoir deux racines ; & la seconde équation, à laquelle on peut donner la forme $xx=-(q+\frac{1}{2}a)x-p-r$, fournira les deux autres racines.

769.

Eclairciſſons cette regle par un exemple, & ſuppoſons donnée l'équation $x^4-10x^3+35xx-50x+24=0$. Si nous la comparons avec notre formule générale, nous avons $a=-10$, $b=35$, $c=-50$, $d=24$, & par conſéquent l'équation qui doit donner la valeur de p eſt $8p^3-140pp+808p-1540=0$, ou $2p^3-35pp+202p-385=0$. Les diviſeurs du dernier terme ſont 1, 5, 7, 11, &c. Le premier 1 ne ſatisfait pas ; mais en faiſant $p=5$, on trouve $250-875+1010-385=0$, en ſorte que $p=5$. Si on ſuppoſe de plus $p=7$, on trouve $686-1715+1414-385=0$, marque que $p=7$ eſt la ſeconde racine. Il reſte à trouver la troiſieme racine : qu'on diviſe donc l'équation par 2, pour avoir $p^3-\frac{35}{2}pp+101p-\frac{385}{2}=0$, & qu'on conſidere que le coefficient du ſecond terme, ou $\frac{35}{2}$, étant la ſomme de toutes les trois racines, & les deux premieres faiſant enſemble 12, la troiſieme doit néceſſairement être $\frac{11}{2}$.

Nous connoiſſons par conſéquent les trois racines en queſtion. Mais remarquons qu'une ſeule eût ſuffi, parce que chacune donne également les quatre racines de notre équation du quatrieme degré.

770.

Pour le prouver, soit d'abord $p=5$, nous aurons $q=\sqrt{25+10-35}=0$, & $r=-\frac{50+50}{0}=\frac{0}{0}$. Or rien n'étant déterminé par-là, prenons la troisieme équation $rr=pp-d=25-24=1$, de sorte que $r=1$; nos deux équations du second degré seront:

I.) $xx=5x-4$, II.) $xx=5x-6$.

La premiere donne les deux racines $x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}$, ou $x=\frac{5\pm3}{2}$, c'est-à-dire $x=4$ & $x=1$.

La seconde équation donne $x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{5\pm1}{2}$, c'est-à-dire, $x=3$ & $x=2$.

Mais supposons maintenant $p=7$, nous aurons $q=\sqrt{25+14-35}=2$ & $r=-\frac{70+50}{4}=-5$, d'où résultent les deux équations du second degré, I.) $xx=7x-12$, II.) $xx=3x-2$; la premiere donne $x=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$, ou $x=\frac{7\pm1}{2}$, ainsi $x=4$ & $x=3$; la seconde fournit la racine $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{3\pm1}{2}$, & par conséquent $x=2$, &

$x=1$; de sorte que par cette seconde supposition on trouve les mêmes quatre racines que par la premiere.

Enfin les mêmes racines se trouvent, par la troisieme valeur de p, $=\frac{11}{2}$. Car on a dans ce cas $q=\sqrt{25+11-35}=1$, & $r=-\frac{55+50}{2}=-\frac{5}{2}$; & par-là les deux équations du second degré,

I.) $xx=6x-8$, II.) $xx=4x-3$.

On tire de la premiere, $x=3\pm\sqrt{1}$, c'est-à-dire, $x=4$ & $x=2$; & de la seconde, $x=2\pm\sqrt{1}$, c'est-à-dire, $x=3$ & $x=1$, ce qui forme encore les quatre racines trouvées ci-devant.

771.

Soit proposée cette autre équation, $x^4-16x-12=0$, dans laquelle $a=0$, $b=0$, $c=-16$, $d=-12$. Notre équation du troisieme degré sera, $8p^3+96p-256=0$, ou $p^3+12p-32=0$, & on peut rendre cette équation encore plus simple, en faisant $p=2t$; car on a alors $8t^3$

$+24t-32=0$, ou $t^3+3t-4=0$. Les diviſeurs du dernier terme ſont 1, 2, 4. Une des racines ſe trouve être $t=1$; donc $p=2$, $q=\sqrt{4}=2$, & $r=\frac{16}{4}=4$. Par conſéquent les deux équations du ſecond degré ſont $xx=2x+2$, & $xx=-2x-6$, & elles fourniſſent les racines $x=1\pm\sqrt{3}$ & $x=-1\pm\sqrt{-5}$.

772.

Nous tâcherons de rendre encore plus familiere la réſolution dont nous parlons, en la répétant toute entiere dans l'exemple ſuivant:

On a l'équation $x^4-6x^3+12xx-12x+4=0$, qui doit être contenue dans la formule $(xx-3x+p)^2-(qx+r)^2=0$, dans la premiere partie de laquelle on a mis $-3x$, parce que -3 eſt la moitié du coefficient -6 du ſecond terme de l'équation propoſée. Cette formule étant développée, donne $x^4-6x^3+(2p+9-qq)xx-(6p+2qr)x+pp-rr=0$, à

comparer avec notre équation, & il en réſulte les égalités ſuivantes:

I.) $2p+9-qq=12$, II.) $6p+2qr=12$, III.) $pp-rr=4$. La premiere donne, $qq=2p-3$; la ſeconde, $2qr=12-6p$, ou $qr=6-3p$; la troiſieme, $rr=pp-4$. Multipliant rr par qq, on a $qqrr=2p^3-3pp-8p+12$; & d'un autre côté, ſi on quarre la valeur de qr, on a $qqrr=36-36p+9pp$; ainſi nous avons l'équation $2p^3-3pp-8p+12=9pp-36p+36$, ou $2p^3-12pp+28p-24=0$, ou $p^3-6pp+14p-12=0$, dont une des racines eſt $p=2$; & il s'enſuit que $qq=1$, $q=1$ & $qr=r=0$. Donc notre équation ſera $(xx-3x+2)^2=xx$, & la racine quarrée en ſera $xx-3x+2=\pm x$. Si on adopte le ſigne ſupérieur, on a $xx=4x-2$; & en admettant le ſigne inférieur, on obtient $xx=2x-2$, d'où ſe tirent les quatre racines $x=2\pm\sqrt{2}$, & $x=1\pm\sqrt{-1}$.

CHAPITRE XV.

D'une nouvelle méthode de résoudre les Equations du quatrieme degré.

773.

Nous avons vu comment, par la regle de *Bombelli*, on résout les équations du quatrieme degré par le moyen d'une équation du troisieme degré; mais on a trouvé, depuis l'invention de cette regle, une autre voie pour parvenir à cette résolution; & comme cette méthode est tout-à-fait différente de la premiere, elle mérite d'être expliquée séparément (*).

774.

On suppose que la racine d'une équation du quatrieme degré a la forme $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, où les lettres p, q, r signifient les racines d'une équation du troisieme degré, $z^3 - fzz + gz - h = 0$; en sorte que $p + q + r = f$, $pq + pr + qr = g$, & $pqr = h$. Cela posé, on quarre la formule adoptée, $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, & on a $xx = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$; & puisque $p + q + r = f$, on a $xx - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$; on prend de nouveau les quarrés, & on trouve $x^4 - 2fxx + ff = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{pqqr} + 8\sqrt{pqrr}$. Or $4pq + 4pr + 4qr = 4g$, ainsi l'équation devient $x^4 - 2fxx + ff - 4g = 8\sqrt{pqr}.(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$; mais $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = x$, & $pqr = h$, ou $\sqrt{pqr} = \sqrt{h}$; donc on parvient à l'équation du quatrieme degré $x^4 - 2fxx - 8x\sqrt{h} + ff - 4g = 0$, dont une des racines est surement $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, & où p, q & r sont les racines de l'équation du troisieme degré, $z^3 - fzz + gz - h = 0$.

(*) La méthode dont il va être question, appartient à M. *Euler* lui-même. Il l'a exposée dans le sixieme volume des anciens Commentaires de Pétersbourg.

775.

L'équation du quatrieme degré, à laquelle nous ſommes parvenus, peut être regardée comme générale, quoique le ſecond terme x^3 y manque; car nous ferons voir plus bas qu'une équation complette quelconque peut être transformée en une autre où le ſecond terme ſoit ôté.

Soit donc propoſée l'équation $x^4-axx-bx-c=0$, pour en déterminer une racine. Nous la comparerons avec la formule trouvée, afin de parvenir aux valeurs de f, g & h; il faut 1°. que $2f=a$, & $f=\frac{a}{2}$; 2°. que $8\sqrt{h}=b$, ainſi $h=\frac{bb}{64}$; 3°. que $ff-4g=-c$, ou $\frac{aa}{4}-4g+c=0$, ou $\frac{1}{4}aa+c=4g$; par conſéquent que $g=\frac{1}{16}aa+\frac{1}{4}c$.

776.

Puis donc que l'équation $x^4-axx-bx-c=0$, donne les valeurs des lettres f, g & h, de maniere que $f=\frac{1}{2}a$, $g=\frac{1}{16}aa+\frac{1}{4}c$, & $h=\frac{1}{64}bb$, ou $\sqrt{h}=\frac{1}{8}b$, on formera de ces valeurs l'équation du troiſieme degré $z^3-fzz+gz-h=0$, pour en chercher les trois racines par la regle connue. Et ſi l'on ſuppoſe ces racines, I.) $z=p$, II.) $z=q$, III.) $z=r$, il faut qu'une des racines de notre équation du quatrieme degré ſoit $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$.

777.

Il ſemble d'abord que cette méthode ne fournit qu'une ſeule des racines de l'équation propoſée; mais ſi on réfléchit que chaque ſigne $\sqrt{}$ peut être pris, tant négativement que poſitivement, on ſentira ſur le champ que cette formule contient même toutes les quatre racines.

Il y a plus, ſi on vouloit admettre tous les changemens poſſibles des ſignes, on auroit huit valeurs différentes pour x, & cependant quatre ſeulement peuvent avoir lieu. Mais remarquons que le produit de ces trois termes, qui eſt $\sqrt{pqr}$, doit être

égal à $\sqrt{h}=\frac{1}{8}b$, & que si $\frac{1}{8}b$ est positif, le produit des termes $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ & $\sqrt{r}$, doit pareillement être positif, de sorte que les variations admissibles se réduisent aux quatre qui suivent:

I.) $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$,

II.) $x=\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}$,

III.) $x=-\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}$,

IV.) $x=-\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}$.

De même, quand $\frac{1}{8}b$ est négatif, on a simplement les quatre valeurs de x que voici:

I.) $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}$,

II.) $x=\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}$,

III.) $x=-\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$,

IV.) $x=-\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}$.

Cette remarque nous met en état de déterminer les quatre racines dans tous les cas; l'exemple suivant le fera voir.

778.

Soit proposée l'équation du quatrieme degré $x^4-25xx+60x-36=0$, dans laquelle le second terme manque. Si nous la comparons avec la formule générale, nous avons $a=25$, $b=-60$ & $c=36$, & après cela $f=\frac{25}{2}$, $g=\frac{625}{16}+9=\frac{769}{16}$, & $h=\frac{225}{4}$; moyennant quoi notre équation du troisieme degré devient:

$$z^3-\frac{25}{2}zz+\frac{769}{16}z-\frac{225}{4}=0.$$

Pour chasser d'abord les fractions, faisons $z=\frac{u}{4}$; nous aurons $\frac{u^3}{64}-\frac{25}{2}\cdot\frac{u^2}{16}+\frac{769}{16}\cdot\frac{u}{4}-\frac{225}{4}=0$, & en multipliant par le plus grand dénominateur, $u^3-50uu+769u-3600=0$. Il faut déterminer les trois racines de cette équation; elles se trouvent toutes trois positives; l'une d'elles est $u=9$, & en divisant l'équation par $u-9$, on trouve la nouvelle équation $uu-41u+400=0$, ou $uu=41u-400$, qui donne $u=\frac{41}{2}\pm\sqrt{\frac{1681}{4}-\frac{1600}{4}}=\frac{41\pm 9}{2}$; de sorte que les

trois racines sont $u=9$, $u=16$, & $u=25$. Par conséquent

I.) $z=\frac{9}{4}$, II.) $z=4$, III.) $z=\frac{25}{4}$.

Et voilà donc les valeurs des lettres p, q & r, c'est-à-dire que $p=\frac{9}{4}$, $q=4$, $r=\frac{25}{4}$. Maintenant, si nous faisons attention que $\sqrt{pqr}=\sqrt{h}=-\frac{15}{2}$, & qu'ainsi cette valeur $=\frac{1}{8}b$ est négative, il nous faudra, pour nous conformer à ce qui a été dit à l'égard des signes des racines $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ & $\sqrt{r}$, prendre tous ces trois radicaux en *moins*, ou n'en prendre qu'un seul en *moins*; & par conséquent, comme $\sqrt{p}=\frac{3}{2}$, $\sqrt{q}=2$ & $\sqrt{r}=\frac{5}{2}$, les quatre racines de l'équation proposée se trouvent être:

$$\text{I.)}\ x=\frac{3}{2}+2-\frac{5}{2}=1,$$
$$\text{II.)}\ x=\frac{3}{2}-2+\frac{5}{2}=2,$$
$$\text{III.)}\ x=-\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}=3,$$
$$\text{IV.)}\ x=-\frac{3}{2}-2-\frac{5}{2}=-6.$$

De ces racines résultent les quatre facteurs,

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)=0.$$

Les deux premiers, multipliés ensemble, donnent $xx-3x+2$; le produit des deux derniers est $xx+3x-18$, & en multipliant ces deux produits l'un par l'autre, on trouve exactement l'équation proposée.

779.

Il nous reste à faire voir comment une équation du quatrieme degré, dans laquelle le second terme se trouve, peut être transformée en une autre où ce terme manque. Nous donnerons pour cet effet la regle suivante.

Soit proposée l'équation générale $y^4+ay^3+byy+cy+d=0$. Qu'on ajoute à y la quatrieme partie du coefficient du second terme, ou bien $\frac{1}{4}a$, & qu'on écrive à la place de la somme une nouvelle lettre x, de façon que $y+\frac{1}{4}a=x$, & par conséquent $y=x-\frac{1}{4}a$; on aura $yy=xx-\frac{1}{2}ax+\frac{1}{16}aa$, $y^3=x^3-\frac{3}{4}axx+\frac{3}{16}aax-\frac{1}{64}a^3$, & enfin ce qui suit:

$$\begin{array}{lllll}
y^4 = & x^4 - ax^3 & + \frac{3}{8}aaxx & - \frac{1}{16}a^3x & + \frac{1}{256}a^4 \\
+ay^3 = & + ax^3 & - \frac{3}{4}aaxx & + \frac{3}{16}a^3x & - \frac{1}{64}a^4 \\
+byy = & & + bxx & - \frac{1}{2}abx & + \frac{1}{16}aab \\
+cy = & & & + cx & - \frac{1}{4}ac \\
+d = & & & & + d \\
\hline
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{llll}
x^4 + 0 & - \frac{3}{8}aaxx & + \frac{1}{8}a^3x & - \frac{3}{256}a^4 \\
 & + bxx & - \frac{1}{2}abx & + \frac{1}{16}aab \\
 & & + cx & - \frac{1}{4}ac \\
 & & & + d
\end{array}\right\} = 0.$$

On a donc à préſent une équation, dans laquelle le ſecond terme eſt ôté, & à laquelle rien n'empêche d'appliquer la regle donnée, pour en déterminer les quatre racines. Après quoi ces valeurs de x étant trouvées, on déterminera facilement celles de y, puiſque $y = x - \frac{1}{4}a$.

780.

Voilà où on eſt parvenu juſqu'à préſent dans la réſolution des équations algébriques; c'eſt inutilement qu'on s'eſt donné beaucoup de peines pour réſoudre de la même maniere les équations du cinquieme degré & de

de dimenſions plus élevées, ou pour les réduire du moins à des degrés inférieurs; de ſorte qu'on n'eſt pas en état de donner des regles générales pour trouver les racines des équations qui paſſent le quatrieme degré.

Tout ce qu'on a eu de ſuccès ne s'étend qu'à des cas très-particuliers; le principal de ces cas eſt celui où une racine rationnelle a lieu; car on la trouve facilement par la méthode des diviſeurs, parce qu'on ſait qu'une telle racine doit toujours être facteur du dernier terme; le procédé, au reſte, eſt le même que celui que nous avons enſeigné pour les équations du troiſieme & du quatrieme degré.

781.

Il ſera cependant néceſſaire d'appliquer encore la regle de *Bombelli* auſſi à une équation qui n'ait point de racines rationnelles.

Soit donnée l'équation $y^4 - 8y^3 + 14yy$

$+4y-8=0$. Il faudra commencer par retrancher le ſecond terme, en ajoutant le quart de ſon coefficient à y, en ſuppoſant $y-2=x$, & en ſubſtituant dans l'équation, au lieu de y ſa nouvelle valeur $x+2$, au lieu de yy la valeur $xx+4x+4$, & au lieu de y^3 la valeur $x^3+6xx+12x+8$. Et faiſant de même à l'égard de y^4, on aura:

$$\begin{array}{rl}
y^4 = & x^4+8x^3+24xx+32x+16 \\
-8y^3 = & \quad -8x^3-48xx-96x-64 \\
+14yy = & \qquad\qquad +14xx+56x+56 \\
+4y = & \qquad\qquad\qquad\quad +4x+8 \\
-8 = & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -8 \\
\hline
& x^4+0-10xx-4x+8=0.
\end{array}$$

Cette équation étant comparée avec notre formule générale, donne $a=10$, $b=4$, $c=-8$; d'où nous concluons que $f=5$, $g=\frac{17}{4}$, $h=\frac{1}{4}$ & $\sqrt{h}=\frac{1}{2}$; que le produit $\sqrt{pqr}$ ſera poſitif; & que c'eſt de l'équation du troiſieme degré $z^3-5zz+\frac{17}{4}z-\frac{1}{4}=0$, qu'il faut chercher les trois racines p, q, r.

782.

Retranchons d'abord les fractions de cette équation. Si nous faiſons $z=\frac{u}{2}$, nous avons, après avoir multiplié par 8, l'équation $u^3-10uu+17u-2=0$, où toutes les racines ſont poſitives. Or les diviſeurs du dernier terme ſont 1 & 2; ſi nous eſſayons par $u=1$, nous trouvons $1-10+17-2=6$; ainſi l'équation ne ſe réduit pas à zéro; mais en eſſayant par $u=2$, nous trouvons $8-40+34-2=0$, ce qui ſatisfait à l'équation, & donne à connoître que $u=2$ eſt une des racines. Les deux autres ſe trouveront en diviſant par $u-2$, comme de coutume; le quotient $uu-8u+1=0$ donne $uu=8u-1$, & $u=4\pm\sqrt{15}$. Et puiſque $z=\frac{1}{2}u$, les trois racines de l'équation du troiſieme degré ſont, I.) $z=p=1$, II.) $z=q=\frac{4+\sqrt{15}}{2}$, III.) $z=r=\frac{4-\sqrt{15}}{2}$.

783.

Ayant donc déterminé p, q, r, nous avons aussi leurs racines quarrées, savoir: $\sqrt{p}=1$, $\sqrt{q}=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{2}$, & $\sqrt{r}=\frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{2}$.

Mais nous avons vu plus haut, (675, 676), que la racine quarrée de $a\pm\sqrt{b}$, quand $\sqrt{aa-b}=c$, s'exprime par $\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$; ainsi, comme dans notre cas $a=8$ & $\sqrt{b}=2\sqrt{15}$, & que par conséquent $b=60$ & $c=2$, nous avons $\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$, & $\sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$.

Or nous avons maintenant $\sqrt{p}=1$, $\sqrt{q}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$, & $\sqrt{r}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$; donc, puisque nous savons aussi que le produit de ces quantités est positif, les quatre valeurs de x seront celles-ci:

I.) $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=1+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$
$=1+\sqrt{5}$,

II.) $x=\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}=1-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$
$=1-\sqrt{5}$,

III.) $x=-\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}=-1+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$
$=-1+\sqrt{3}$,

IV.) $x=-\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}=-1-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$
$=-1-\sqrt{3}$.

Enfin, comme nous avions $y=x+2$, les quatre racines de l'équation proposée sont:

I.) $y=3+\sqrt{5}$, III.) $y=1+\sqrt{3}$,
II.) $y=3-\sqrt{5}$, IV.) $y=1-\sqrt{3}$.

CHAPITRE XVI.

De la résolution des Equations par des approximations.

784.

LORSQUE les racines d'une équation ne sont pas rationnelles, soit qu'on puisse les exprimer par des quantités radicales, soit qu'on n'ait pas même cette ressource, comme c'est le cas pour les équations qui passent le quatrieme degré, on est obligé de se

contenter de déterminer leurs valeurs par des approximations, c'est-à-dire par des voies qui font qu'on approche toujours davantage de la vraie valeur, jusqu'à ce que l'erreur puisse être censée nulle. On a proposé différentes méthodes de cette espece, nous allons détailler les principales.

785.

Le premier moyen dont nous parlerons, suppose qu'on ait déjà déterminé assez exactement la valeur d'une racine (*); qu'on sache, par exemple, qu'une telle valeur surpasse 4, & qu'elle est plus petite que 5. Dans ce cas, si l'on suppose cette valeur $=4+p$, on est sûr que p exprime une fraction. Or si p est une fraction, & par conséquent moindre que l'unité, le quarré

(*) Cette méthode est celle que *Newton* a donnée au commencement de sa *méthode des fluxions*. En l'approfondissant on la trouve sujette à différentes imperfections; c'est pourquoi on y substituera avec avantage la méthode que M. *de la Grange* a donnée dans les Mémoires de Berlin, pour les années 1767 & 68.

de p, son cube, & en général toutes les puissances plus hautes de p, seront encore beaucoup plus petites à l'égard de l'unité, & cela fait que, puisqu'il ne s'agit que d'une approximation, on peut les omettre dans le calcul. Quand on aura donc déterminé à peu près la fraction p, on connoîtra déjà plus exactement la racine $4+p$; on partira de-là pour déterminer une nouvelle valeur encore plus exacte, & on continuera de la même maniere, jusqu'à ce qu'on ait approché de la vérité autant qu'on le souhaitoit.

786.

Nous éclaircirons cette méthode d'abord par un exemple facile, en cherchant par approximation la racine de l'équation $xx=20$.

On voit ici que x est plus grand que 4 & plus petit que 5; en conséquence de cela on fera $x=4+p$, & on aura $xx=16+8p+pp=20$; mais comme pp est très-

petit, on négligera ce terme pour avoir ſeulement l'équation $16+8p=20$, ou $8p=4$; elle donne $p=\frac{1}{2}$ & $x=4\frac{1}{2}$, ce qui approche déjà beaucoup plus de la vérité. Si donc on ſuppoſe à préſent $x=4\frac{1}{2}+p$; on eſt ſûr que p ſignifie une fraction encore beaucoup plus petite qu'auparavant, & qu'on pourra négliger pp à bien plus forte raiſon. On aura donc $xx=20\frac{1}{4}+9p=20$, ou $9p=-\frac{1}{4}$, & par conſéquent $p=-\frac{1}{36}$; donc $x=4\frac{1}{2}-\frac{1}{36}=4\frac{17}{36}$.

Que ſi l'on vouloit approcher encore davantage de la vraie valeur, on feroit $x=4\frac{17}{36}+p$, & on auroit $xx=20\frac{1}{1296}+8\frac{34}{36}p=20$; ainſi $8\frac{34}{36}p=-\frac{1}{1296}$, $322p=-\frac{36}{1296}=-\frac{1}{36}$, & $p=-\frac{1}{36.322}=-\frac{1}{11592}$. Donc $x=4\frac{17}{36}-\frac{1}{11592}=4\frac{4473}{11592}$, valeur qui approche ſi fort de la vérité, qu'on peut avec confiance regarder l'erreur comme nulle.

787.

Généraliſons ce que nous venons d'expoſer, en ſuppoſant que l'équation donnée ſoit $xx=a$, & qu'on ſache d'avance que x eſt plus grand que n, mais plus petit que $n+1$. Si après cela nous ſuppoſons $x=n+p$, en ſorte que p doive être une fraction, & que pp puiſſe ſe négliger comme une quantité très-petite, nous aurons $xx=nn+2np=a$; ainſi $2np=a-nn$, & $p=\frac{a-nn}{2n}$; par conſéquent $x=n+\frac{a-nn}{2n}=\frac{nn+a}{2n}$. Or ſi n approchoit déjà de la vraie valeur, cette nouvelle valeur $\frac{nn+a}{2n}$ en approchera encore beaucoup plus. Ainſi en la ſubſtituant à n, on ſe trouvera encore plus près de la vérité; on aura une nouvelle valeur qu'on pourra ſubſtituer de nouveau, afin d'approcher encore davantage; & on pourra continuer le même procédé auſſi loin qu'on voudra.

Soit, par exemple, $a=2$, c'eſt-à-dire qu'on demande la racine quarrée de 2; ſi

on connoît déjà une valeur assez approchante, & qu'on l'exprime par n, on aura une valeur de la racine encore plus approchante, exprimée par $\frac{nn+2}{2n}$. Soit donc

I.) $n=1$, on aura $x=\frac{3}{2}$,

II.) $n=\frac{3}{2}$, on aura $x=\frac{17}{12}$,

III.) $n=\frac{17}{12}$, on aura $x=\frac{577}{408}$;

& cette derniere valeur approche si fort de $\sqrt{2}$, que son quarré $\frac{332929}{166464}$ ne differe du nombre 2 que de la petite quantité $\frac{1}{166464}$, dont il le surpasse.

788.

On pourra procéder de la même maniere, quand il s'agira de trouver par approximation des racines cubiques, quarré-quarrées, &c.

Soit donnée l'équation du troisieme degré, $x^3=a$, & qu'on se propose de trouver la valeur de $\sqrt[3]{a}$. On supposera, sachant qu'elle est à peu près n, que $x=n+p$; on aura, en omettant pp & p^3, $x^3=n^3+3nnp=a$; ainsi $3nnp=a-n^3$, & $p=\frac{a-n^3}{3nn}$; donc $x=\frac{2n^3+a}{3nn}$. Si donc n est de fort près $=\sqrt[3]{a}$, la formule que l'on vient de trouver en approchera encore beaucoup plus. Mais pour une précision encore plus grande, on pourra la substituer à son tour à la place de n, & ainsi de suite.

Soit, par exemple, $x^3=2$, & qu'on veuille déterminer $\sqrt[3]{2}$. Si n approche de près le nombre cherché, la formule $\frac{2n^3+2}{3nn}$ exprimera ce nombre encore de plus près; qu'on fasse donc

I.) $n=1$, on aura $x=\frac{4}{3}$,

II.) $n=\frac{4}{3}$, on aura $x=\frac{91}{72}$,

III.) $n=\frac{91}{72}$, on aura $x=\frac{1621330896}{1286634294}$.

789.

On emploie cette méthode avec le même succès, pour trouver par approximation les racines de toutes les équations.

Supposons, pour le faire voir, qu'on ait l'équation générale du troisieme degré, $x^3+axx+bx+c=0$, où n approche déjà beaucoup d'une des racines. Faisons $x=n-p$; &, puisque p sera une fraction, négligeant les puissances de cette lettre plus hautes que le premier degré, nous aurons $xx=nn-2np$, & $x^3=n^3-3npp$, d'où résulte l'équation $n^3-3nnp+ann-2anp+bn-bp+c=0$, ou $n^3+ann+bn+c=3nnp+2anp+bp=(3nn+2an+b)p$; ainsi $p=\frac{n^3+ann+bn+c}{3nn+2an+b}$, & $x=n-\left(\frac{n^3+ann+bn+c}{3nn+2an+b}\right)=\frac{2n^3+ann-c}{3nn+2an+b}$. Cette valeur, qui est déjà plus exacte que la premiere, étant substituée à la place de n, en fournira une nouvelle encore plus exacte.

790.

Soit, pour appliquer ce procédé à un exemple, $x^3+2xx+3x-50=0$, où

$a=2$, $b=3$ & $c=-50$. Si n est censé approcher de près une des racines, $x=\frac{2n^3+2nn+50}{3nn+4n+3}$, sera une valeur encore plus proche de la vraie. Or la valeur $x=3$ n'étant pas éloignée de la véritable, nous supposerons $n=3$, & nous trouvons $x=\frac{62}{21}$. Que si nous écrivions cette nouvelle valeur à la place de n, nous en trouverions une autre encore plus exacte.

791.

Nous ne donnerons pour les équations des degrés supérieurs au troisieme, que l'exemple suivant:

Soit $x^5=6x+10$, ou $x^5-6x-10=0$, où on remarque facilement que 1 est trop petit, & que 2 est trop grand. Or, si $x=n$ est une valeur assez proche de la vraie, & qu'on fasse $x=n+p$, on aura $x^5=n^5+5n^4p$, & par conséquent $n^5+5n^4p=6n+6p+10$, ou $5n^4p-6p=6n+10-n^5$. Donc $p=\frac{6n+10-n^5}{5n^4-6}$

& $x = \frac{4n^5 + 10}{5n^4 - 6}$. Qu'on suppose $n = 1$, on aura $x = \frac{14}{-1} = -14$; cette valeur eſt tout-à-fait impropre, & cela vient de ce que la valeur approchée de n étoit de beaucoup trop petite. On fera donc $n = 2$, & on aura $x = \frac{138}{74} = \frac{69}{37}$, valeur qui s'écarte beaucoup moins de la vraie. Si on ſe donnoit la peine de ſubſtituer maintenant, au lieu de n, la fraction $\frac{69}{37}$, on parviendroit à une valeur encore bien plus exacte de la racine x.

792.

Voilà la méthode la plus ordinaire pour trouver par approximation les racines d'une équation, & elle s'applique utilement dans tous les cas.

Nous allons indiquer cependant une autre méthode, qui mérite attention à cauſe de la facilité du calcul (*). Le fondement de

cette méthode conſiſte à déterminer pour chaque équation une ſuite de nombres, comme a, b, c, &c. tels que chaque terme de la ſuite, diviſé par le précédent, indique la valeur de la racine d'autant plus exactement, qu'on aura continué plus loin cette ſuite de nombres.

Suppoſons que nous ſoyons parvenus déjà aux termes p, q, r, s, t, &c. il faudra que $\frac{q}{p}$ indique la racine x déjà aſſez exactement, c'eſt-à-dire qu'on ait à très-peu près $\frac{q}{p} = x$. On aura de même $\frac{r}{q} = x$, & la multiplication des deux valeurs donnera $\frac{r}{p} = xx$.

(*) La méthode d'approximation qui ſuit, ſe fonde ſur la théorie des ſéries qu'on nomme *récurrentes*, & qui ont été imaginées par M. *de Moivre*. On doit cette méthode à M. *Daniel Bernoulli*, qui l'a donnée dans les anciens Commentaires de Pétersbourg, *tom. III*. Mais M. *Euler* la préſente ici ſous un point de vue un peu différent. Ceux qui ſouhaiteront d'approfondir ces matieres, peuvent conſulter les chapitres XIII & XVII du premier volume de l'*Introd. in anal. inf.* de notre célebre Auteur : Ouvrage excellent, dans lequel pluſieurs des matieres traitées dans cette premiere partie, & beaucoup d'autres qui ſont pareillement relatives aux Mathématiques pures, ſont développées avec autant de clarté que de profondeur.

De plus, comme $\frac{s}{r}=x$, on aura aussi $\frac{s}{p}=x^3$; ensuite, puisque $\frac{t}{s}=x$, on aura $\frac{t}{p}=x^4$, & ainsi de suite.

793.

Afin de nous expliquer mieux sur cette méthode, nous commencerons par l'équation du second degré $xx=x+1$, & nous supposerons que dans la série ci-dessus se présentent les termes p, q, r, s, t, &c. Or, comme $\frac{q}{p}=x$, & $\frac{r}{p}=xx$, nous obtiendrons l'équation $\frac{r}{p}=\frac{q}{p}+1$, ou $q+p=r$. Et comme nous trouvons de la même maniere que $s=r+q$, & $t=s+r$; nous en concluons que chaque terme de notre suite est la somme des deux termes précédens; de sorte qu'ayant les deux premiers termes, on est en état de continuer facilement la suite aussi loin qu'on voudra. Quant à ces deux premiers termes, on peut les prendre à volonté; si nous supposons donc qu'ils soient 0, 1, notre suite sera 0, 1, 1, 2,

3,

3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, &c. & telle que, si on en divise un terme quelconque par celui qui le précede immédiatement, on aura une valeur de x d'autant plus approchante de la véritable, qu'on aura choisi un terme plus éloigné. L'erreur, à la vérité, est très-grande au commencement; mais plus on avance, & plus elle diminue. Voici la suite de ces valeurs de x, dans l'ordre où elles s'approchent toujours davantage de la véritable:

$$x=\frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{21}{13},\ \frac{34}{21},\ \frac{55}{34},\ \frac{89}{55},\ \frac{144}{89},\ \&c.$$

Si, par exemple, on fait $x=\frac{21}{13}$, on a $\frac{441}{169}=\frac{21}{13}+1=\frac{442}{169}$, où l'erreur n'est que de $\frac{1}{169}$: les termes suivans la donneroient encore plus petite.

794.

Considérons aussi l'équation $xx=2x+1$; & puisque toujours $x=\frac{q}{p}$, & $xx=\frac{r}{p}$, nous aurons $\frac{r}{p}=\frac{2q}{p}+1$, ou $r=2q+p$;

d'où nous concluons que le double de chaque terme ajouté au terme précédent, donne le terme suivant. Si nous commençons donc encore par 0, 1, nous aurons la série :

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, &c.

d'où il s'ensuit que la valeur cherchée de x sera exprimée de plus en plus exactement par les fractions suivantes :

$x = \frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{29}{12}, \frac{70}{29}, \frac{169}{70}, \frac{408}{169}$, &c.

lesquelles, par conséquent, approcheront toujours davantage de la vraie valeur $x = 1 + \sqrt{2}$; de sorte que si on retranche de ces fractions l'unité, la valeur de $\sqrt{2}$ se trouvera exprimée de plus en plus exactement par les fractions :

$\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}$, &c.

Par exemple, $\frac{99}{70}$ a pour quarré $\frac{9801}{4900}$, ce qui ne differe que de $\frac{1}{4900}$ du nombre 2.

795.

Cette méthode n'est pas moins applicable aux équations qui ont un plus grand

nombre de dimensions. Si l'on a, par exemple, l'équation du troisieme degré $x^3 = xx + 2x + 1$, on fera $x = \frac{q}{p}$, $xx = \frac{r}{p}$, & $x^3 = \frac{s}{p}$, & on aura $s = r + 2q + p$, par où l'on voit comment, par les trois termes p, q & r, on doit déterminer le suivant s; & comme le commencement est toujours arbitraire, on peut former la série qui suit :

0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129, &c.

de laquelle résultent les fractions suivantes pour les valeurs approchées de x :

$x = \frac{0}{0}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{3}, \frac{13}{6}, \frac{28}{13}, \frac{60}{28}, \frac{129}{60}$, &c.

les premieres de ces valeurs sont prodigieusement en défaut; mais si on substitue dans l'équation, au lieu de x, $\frac{60}{28}$ ou $\frac{15}{7}$, on trouve $\frac{3375}{343} = \frac{225}{49} + \frac{30}{7} + 1 = \frac{3388}{343}$, où l'erreur n'est que de $\frac{13}{343}$.

796.

Il faut remarquer cependant que toutes les équations ne sont pas de nature à pouvoir y appliquer cette méthode; & particuliérement lorsque le second terme manque,

elle ne peut être employée. Car soit, par exemple, $xx=2$; si on vouloit faire $x=\frac{q}{p}$ & $xx=\frac{r}{p}$, on auroit $\frac{r}{p}=2$, ou $r=2p$, c'est-à-dire $r=0q+2p$, d'où résulteroit la suite

1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32 &c.

de laquelle on ne peut rien conclure, parce que chaque terme, divisé par le précédent, donne toujours $x=1$, ou $x=2$. Mais on peut obvier à cet inconvénient, en faisant $x=y-1$; car de cette façon on a $yy+2y-1=2$; & si l'on fait maintenant $y=\frac{q}{p}$ & $yy=\frac{r}{p}$, on trouve l'approximation que nous avons déjà donnée ci-dessus.

797.

Il en seroit de même de l'équation $x^3=2$; elle ne fourniroit pas une telle suite de nombres qui indiquât la valeur de $\sqrt[3]{2}$. Mais on n'a qu'à supposer $x=y-1$, afin d'avoir l'équation $y^3-3yy+3y-1=2$, ou $y^3=3yy-3y+1$; car faisant à présent

$y=\frac{q}{p}$, $yy=\frac{r}{p}$, & $y=\frac{s}{p}$, on a $s=3r-3q+3p$, moyennant quoi l'on voit comment trois termes donnés déterminent le suivant.

Adoptant donc trois termes quelconques pour les premiers, par exemple 0, 0, 1, on a la série que voici:

0, 0, 1, 3, 6, 12, 27, 63, 144, 324, &c.

Les deux derniers termes de cette suite donnent $y=\frac{324}{144}$ & $x=\frac{5}{4}$; & cette fraction approche en effet assez de la racine cubique de 2; car le cube de $\frac{5}{4}$ est $\frac{125}{64}$, & celui de $2=\frac{128}{64}$.

798.

Il faut observer de plus, au sujet de cette méthode, que lorsque l'équation a une racine rationnelle, & qu'on choisit le commencement de la période tel que cette racine en résulte, chaque terme de la suite, divisé par le terme précédent, donnera également la racine exactement.

Pour le faire voir, soit donnée l'équation $xx=x+2$, dont une des racines est

$x=2$; comme on a ici, pour la série, la formule $r=q+2p$, si on prend 1, 2 pour les deux premiers termes, on a la suite 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c. qui est une progression géométrique dont l'exposant $=2$.

La même propriété se prouve par l'équation du troisieme degré $x^3=xx+3x+9$, qui a $x=3$ pour une des racines. Si on suppose les premiers termes 1, 3, 9, on trouvera, par la formule $s=r+3q+9p$, la série 1, 3, 9, 27, 81, 243, &c. qui est pareillement une progression géométrique.

799.

Mais lorsque le commencement de la suite s'écarte de la racine, il ne faut pas croire qu'on ira du moins en s'approchant de cette racine; car lorsque l'équation a plus d'une racine, la suite ne donne par approximation que la plus grande racine; on ne trouve pas une des moindres, à moins

d'avoir choisi les premiers termes convenablement pour cet effet; cela s'éclaircira par l'exemple suivant:

Soit l'équation $xx=4x-3$, dont les deux racines sont $x=1$ & $x=3$. La formule pour la suite est $r=4q-3p$, & si l'on prend 1, 1 pour le commencement de la série, qui indique par conséquent la plus petite racine, on a pour la suite entiere: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, &c. mais si on adopte pour premiers termes les nombres 1, 3, qui contiennent la plus grande racine, on a la suite: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, &c. où tous les termes indiquent avec précision la racine 3. Enfin, si on adopte un autre commencement quelconque, pourvu qu'il soit tel que la plus petite racine n'y soit pas comprise, la série approchera toujours davantage de la plus grande racine 3; c'est ce qu'on peut voir par les séries qui suivent:

Commencement,

0, 1, 4, 13, 40, 121, 364, &c.

1, 2, 5, 14, 41, 122, 365, &c.

2, 3, 6, 15, 42, 123, 366, 1095, &c.

2, 1, −2, −11, −38, −118, −362, −1091, −3278, &c.

où les quotiens de la division des derniers termes par les précédens, approchent toujours plus de la racine plus grande 3, & jamais de la plus petite.

800.

On peut appliquer cette méthode même à des équations qui vont à l'infini; l'équation suivante en fournira un exemple:

$$x^{\infty} = x^{\infty-1} + x^{\infty-2} + x^{\infty-3} + x^{\infty-4} + \&c.$$

La série doit être telle pour cette équation, que chaque terme soit égal à la somme de tous les précédens, c'est-à-dire qu'on aura

1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, &c.

d'où l'on voit que la plus grande racine de l'équation proposée est exactement $x=2$; & c'est ce qu'on peut faire voir aussi de la maniere suivante. Qu'on divise l'équation par x^{∞}, on aura

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \&c.$$

ce qui est une progression géométrique, dont la somme se trouve $= \frac{1}{x-1}$; de sorte que $1 = \frac{1}{x-1}$; multipliant donc par $x-1$, on a $x-1=1$, & $x=2$.

801.

Outre ces deux méthodes de déterminer par des approximations les racines d'une équation, on en trouve çà & là quelques autres, mais qui sont toutes ou trop pénibles ou pas assez générales. La méthode qui mérite la préférence sur toutes, est celle que nous avons expliquée en premier lieu; car elle s'applique avec succès à toutes les especes d'équations, tandis que l'autre exige souvent que l'équation soit préparée

d'une certaine maniere, ſans quoi on ne pourroit en faire uſage; nous en avons vu la preuve dans différens exemples.

Fin du Tome premier.

TABLE DES SECTIONS ET CHAPITRES CONTENUS DANS CE VOLUME.

SECTION PREMIERE.

Des différentes Méthodes de calcul pour les grandeurs ſimples ou incomplexes.

SECTION SECONDE.

Des différentes Méthodes de calcul pour les grandeurs composées ou complexes.

SECTION TROISIEME.

Des Rapports & des Proportions.

SECTION QUATRIEME.

Des Equations algébriques, & de la résolution de ces Equations.

Fin de la Table.